

COUCHE ABSORBANTE PARFAITEMENT ADAPTEE TRIDIMENSIONNELLE POUR LA PROPAGATION DES ONDES EN PRESENCE DE BARRIERE

THREE DIMENSIONAL PERFECTLY MATCHED LAYERS FOR WAVE PROPAGATION IN THE CASE OF WAVE BARRIER

Sijia Li¹, Michael Brun¹, Irini Djeran-Maigre¹, Sergey Kuznetsov²

¹ *Univ Lyon, INSA-Lyon, GEOMAS, 69621 Villeurbanne, France*

² *Institute for Problems in Mechanics, 119526 Moscow, Russia*

RÉSUMÉ – Une PML tridimensionnelle est proposée pour la modélisation de domaines infinis. La formulation 3D de PML est couplée aux autres sous domaines dans le cadre performant et flexible des méthodes dites HATI (Heterogeneous Asynchronous Time Integrator). Une étude de barrière d'ondes pour la protection des bâtiments contre la propagation des ondes de surface est réalisée à l'aide de PML hybride asynchrone.

ABSTRACT – This paper presents a three-dimensional PML (Perfectly Matched Layer) for modeling unbounded domains. The proposed unsplit 3D PML formulation is implemented in the framework of Hybrid Asynchronous Time Integrator (HATI). The efficiency of the coupling method is investigated in the study of screening effect provided by a horizontal wave barrier in mitigating ground surface vibration.

1. Introduction

La protection des bâtiments contre les ondes sismiques et les ondes produites par des vibrations industrielles devient un problème de plus en plus important en raison de l'intensité croissante des activités humaines telles que les trafics ferroviaire et routier. La barrière d'ondes a pour but de dissiper l'énergie d'ondes se propageant dans le sol ; sa conception exige le développement d'outils numériques pour analyser son effet d'isolation. L'un des enjeux de simulation numérique de propagation d'ondes en présence de barrière d'ondes est de minimiser les réflexions parasites aux frontières du maillage. Le moyen le plus simple est bien sûr de considérer un très grand maillage étendu de sorte que les ondes réfléchies aux frontières du maillage ne viennent pas perturber la solution recherchée, mais cela peut conduire à des temps de calcul rédhibitoires, en particulier lors des excitations de longue durée. Par conséquent, des conditions aux limites absorbantes et non réfléchissantes, placées aux frontières du domaine tronqué, sont requises pour modéliser les milieux infinis (Kosloff and Kosloff, 1986 ; Semblat et al., 2011 ; Li et al., 2018 ; 2019). La méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) dont le formalisme consiste en un passage dans le domaine des coordonnées complexes, initialement décrites par Jean-Pierre Bérenger (1994), est considérée comme la plus efficace. Cet article présente une PML tridimensionnelle hybride (différents intégrateurs de temps) asynchrone (différents pas de temps) pour reproduire numériquement des domaines infinis. Tout d'abord, en étudiant la forme forte de la propagation des ondes

dans un milieu PML, nous en décrivons sa capacité d'atténuer les ondes indépendamment des fréquences. Ensuite, la formulation 3D PML basée sur les travaux de Basu (Basu and Chopra, 2003 ; Basu, 2009) est couplée au domaine intérieur en utilisant la méthode GC de couplage entre sous-domaines (Gravouil and Combescure, 2001), basée sur l'approche Schur duale. Cette approche de couplage permet d'éviter d'introduire les coordonnées complexes dans le domaine intérieur (hors PML) et de traiter les sous-domaines avec différents intégrateurs temporels associés à différents pas de temps. Enfin, une application 3D réaliste de la barrière d'ondes horizontale est étudiée, en prenant en compte quatre sous domaines : le domaine du sol, une plaque excitée par la sollicitation dynamique, la barrière d'ondes et le domaine des PML.

2. Forme forte de PML tridimensionnelle

Le formalisme de PML consiste en un passage de l'équation de propagation des ondes élastiques dans le domaine des coordonnées complexes. Les coordonnées complexes sont définies dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_i} = \lambda_i(x_i) = 1 + f_i^e(x_i) + \frac{f_i^p(x_i)}{i\omega} \quad (1)$$

La fonction d'amortissement f_i^p sert à absorber les ondes se propageant dans la direction x_i , tandis que la fonction f_i^e est destinée à atténuer les ondes évanescentes. Classiquement, la fonction d'amortissement f_i^p s'écrit comme un polynôme de degré m_{PML} , comme indiqué ci-dessous :

$$f^p = \gamma_0 \left(\frac{x - x_0}{L} \right)^{m_{PML}} \quad (2)$$

Les équations du domaine fréquentiel pour la PML tridimensionnelle s'écrivent :

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho u_i \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda_i(x_i)} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (5)$$

C_{ijkl} sont les composantes du tenseur de la loi de comportement élastique. Grâce à l'introduction des coordonnées complexes, la transformée de Fourier inverse peut être facilement appliquée aux équations du domaine fréquentiel.

En étudiant la forme forte de propagation des ondes dans les PML 1D, la capacité d'atténuation de PML en est déduite sous forme de décrétement logarithmique en fonction de la vitesse des ondes, de l'épaisseur et de la fonction d'amortissement de PML :

$$\delta = \ln \left(\frac{|u(x_0)|}{|u(x_0 + L)|} \right) = \int_{x_0}^L \frac{\gamma_0}{v_p} \left(\frac{x - x_0}{L} \right)^{m_{PML}} dx = \frac{\gamma_0 L}{(m_{PML} + 1)v_p} \quad (6)$$

Ensuite, la formule de dimensionnement de PML est proposée. Après avoir choisi le coefficient d'atténuation $R_{attenuation}$, l'épaisseur de PML L , la fonction d'amortissement m_{PML} , la valeur de γ_0 peut être obtenue.

$$\gamma_0 = \frac{(m_{PML} + 1)}{2L} \times v_\rho \times \ln\left(\frac{1}{R_{attenuation}}\right) \quad (7)$$

$$R_{attenuation} = \left(\frac{|u(x_0 + L)|}{|u(x_0)|}\right)^2 = e^{-2\delta} \quad (8)$$

3. Couplage hybride asynchrone entre PML et le domaine physique

La discrétisation spatiale est faite par la suite, par la méthode des éléments finis. A l'interface entre le sol et la PML, la continuité des vitesses est imposée par la condition suivante :

$$\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_2 = 0 \quad (9)$$

\mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 sont les matrices qui sélectionnent les nœuds à l'interface Γ_1 . En utilisant la méthode HATI (Heterogeneous Asynchronous Time Integrator) proposée par Gravouil et Combescure (2001 ; 2002), différents intégrateurs temporels, avec leur propre pas de temps, peuvent être adoptés. Ceci est fait en fonction du sous-domaine considéré, ce qui est très utile pour coupler la formulation complexe de PML avec d'autres sous-domaines, tout en conservant les formulations et les intégrateurs de temps classiques dans d'autres sous-domaines.

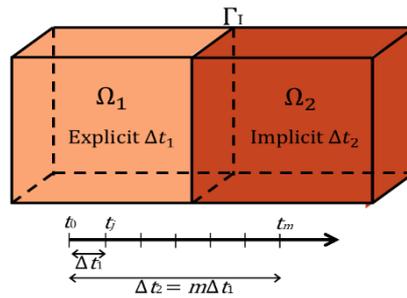


Figure 1. Domaine Ω divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2

La forme faible des sous-domaines avec l'équation de continuité de vitesse peut s'exprimer sous la forme discrète dans l'espace et le temps :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_1^j + \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1^j = \mathbf{F}_1^{\text{ext},j} - \mathbf{L}_1^T \boldsymbol{\lambda}^j \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{U}}_2^m + (\mathbf{C}_2 + \tilde{\mathbf{C}}_2) \dot{\mathbf{U}}_2^m + (\mathbf{K}_2 + \tilde{\mathbf{K}}_2) \mathbf{U}_2^m + \bar{\mathbf{K}}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^m + \mathbf{P}_2(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \mathbf{E}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0) = \mathbf{F}_2^{\text{ext},m} - \mathbf{L}_2^T \boldsymbol{\lambda}^m \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_1^j + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_2^j = \mathbf{0} \quad (12)$$

4. Résultats numériques

Un problème classique d'interaction sol-structure d'une fondation rigide sur un demi-espace hétérogène est initialement modélisé pour tester l'efficacité de PML hybride asynchrone, comme le montre la figure 2. La sollicitation est une onde incidente Ricker non harmonique définie par :

$$Ric(t, t_p, t_s) = A \left(2\pi^2 \frac{(t - t_s)^2}{t_p^2} - 1 \right) \exp \left(-\pi^2 \frac{(t - t_s)^2}{t_p^2} \right) \quad (13)$$

Trois sous-domaines différents sont considérés : le milieu du sol (sous-domaine 1), le milieu PML (sous-domaine 2) et les fondations rigides (sous-domaine 3). Le sous-domaine du sol est composé de deux couches. La deuxième couche est caractérisée par un module de Young deux fois plus grand que la première, comme le montre le tableau 1. De même, l'interface entre les couches doit être prise en compte dans le sous-domaine PML, conduisant à deux PMLs avec les mêmes paramètres mécaniques que les deux couches de sol.

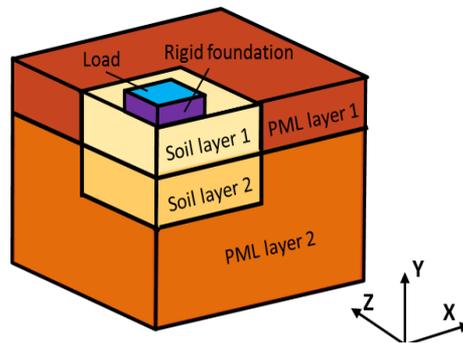


Figure 2. Fondation rigide sur un milieu hétérogène semi-infini

En utilisant la stratégie de couplage de sous-domaines, trois sous-domaines différents sont couplés, grâce à la co-simulation explicite / implicite multi-pas de temps. Le milieu du sol est intégré avec un schéma explicite et un pas de temps Δt_1 , tandis que la fondation rigide est intégrée à l'aide du schéma Newmark implicite du second ordre et la PML quant à elle est intégrée à l'aide du schéma Newmark implicite du troisième ordre étendu, avec un pas de temps $\Delta t_3 = \Delta t_2 = m\Delta t_1$, m indiquant le rapport de pas de temps.

Tableau 1. Paramètres du sol

	Densité $\rho(\text{kg/m}^3)$	Coefficient Poisson ν	Module de Young, couche 1 (MPa)	Module de Young, couche 2 (MPa)
Sol	1700	0.24	10	20

Dans le cas de mono-pas de temps, le rapport de pas de temps $m=1$, $\Delta t_1=0.025\text{s}$, satisfaisant la condition CFL (Courant-Friedrich-Lévy) est imposée par les propriétés mécaniques du sous-domaine du sol. L'amplitude des ondes parasites réfléchies est de 1,11% dans les directions X et Z, et de 2,97% dans la direction Y. Les isovaleurs du déplacement à différents moments sont affichées sur la figure 3. La figure 3(a) montre la

propagation des ondes incidentes de Ricker. La deuxième image, figure 3(b), montre que le pic maximal des ondes incidentes de Ricker commence à être absorbé dans la région PML, suivi d'un pic plus petit produit dans le sous-domaine du sol. A 5,05s, le pic maximal a été absorbé par PML et un pic plus petit commence à être absorbé. La dernière image à 5,9 s, figure 3(d), montre que toutes les ondes sont absorbées par la région de PML. Aucune réflexion évidente ne peut être observée à l'interface entre la PML et le sol, indiquant une performance très satisfaisante de la PML.

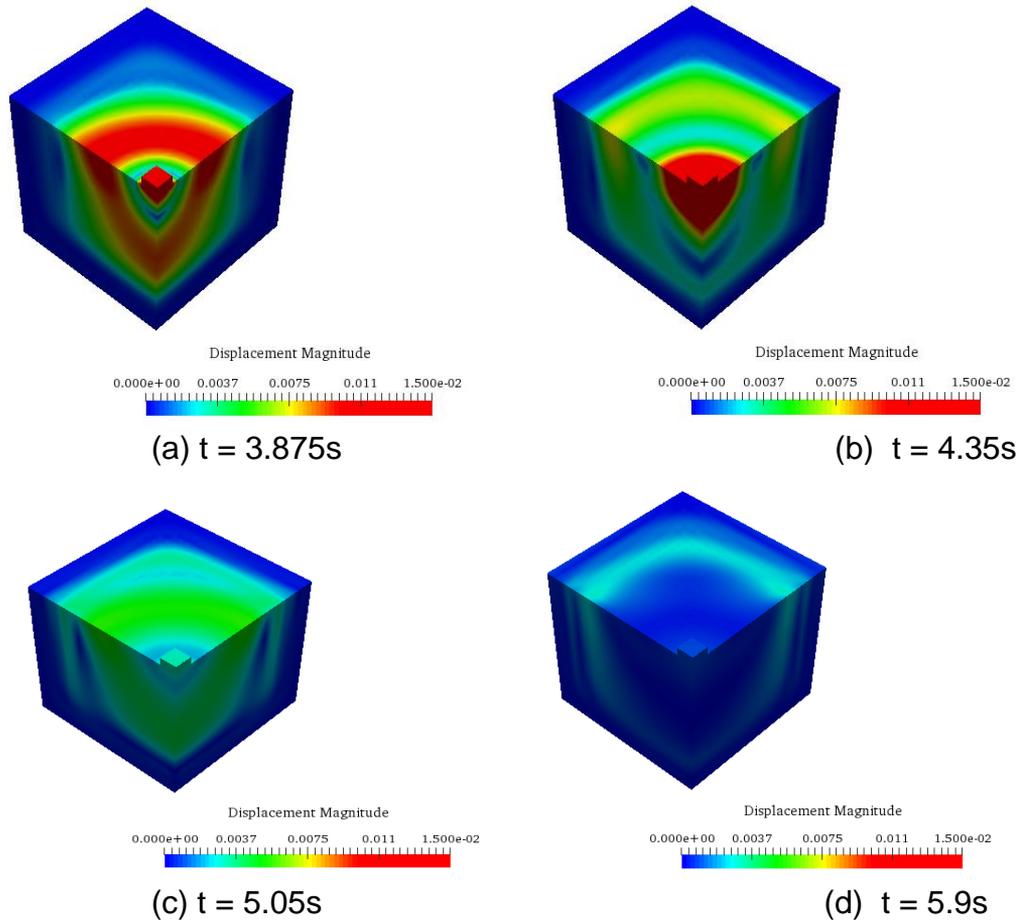


Figure 3. Isovaleurs du déplacement à différents temps

Dans le cas multi-pas de temps, dans les sous-domaines du sol et de la fondation rigide, un pas de temps plus grand est adopté, puisque le pas de temps dans un schéma implicite n'est pas restreint par la condition CFL. En termes de temps de calcul normalisé, une réduction importante du temps de calcul peut être obtenue en utilisant un rapport de pas de temps $m = 3$, soulignant l'intérêt de l'intégration temporelle asynchrone hybride (tableau 2).

Tableau 2. Temps de calcul pour différents rapports de pas de temps

	$m=1, \Delta t_1=0.025$	$m=3, \Delta t_1=0.025$
Temps de calcul normalisé	1	0.287

Enfin, une application tridimensionnelle est réalisée pour l'étude de barrières d'ondes horizontales (HWB), dans le contexte de l'isolation des vibrations contre la propagation des ondes de surface. Les infrastructures ferroviaires, par exemple, les tramways, sont souvent proches des bâtiments habitables, et les ondes produites par le mouvement de train vont susciter la vibration des bâtiments adjacents et vont affecter le confort des habitants. La plupart de l'énergie vibratoire est transférée par les ondes de Rayleigh qui peuvent provoquer de forts mouvements du sol. Des mesures, comme la présence des barrières d'ondes horizontales, sont proposées pour réduire la vibration (Grau and Laulagnet 2015).

Dans ce cas, le mouvement de train est représenté par une plaque sous forces uniformes $P = P_0 \sin(\omega_0 t)$, dont la longueur des ondes Rayleigh dans le sol est égale à 7,67m. Une barrière d'ondes horizontale est placée derrière la plaque sollicitée pour réduire la vibration au point d'observation. Aux frontières du sol, le milieu infini est modélisé par les PML 3D. En raison des différentes caractéristiques des sous-domaines, la stratégie de co-simulation est appliquée pour satisfaire l'exigence de chaque sous-domaine afin d'obtenir la meilleure efficacité de calcul. Les 4 sous-domaines sont couplés à l'aide de la co-simulation explicite/implicite et intégrés en temps avec leur propre intégrateur temporel. L'effet de l'isolation des barrières d'ondes est étudié en fonction de différentes dimensions. Il est révélé que la meilleure longueur des barrières est proche de la longueur des ondes Rayleigh qui portent le plus d'énergie.

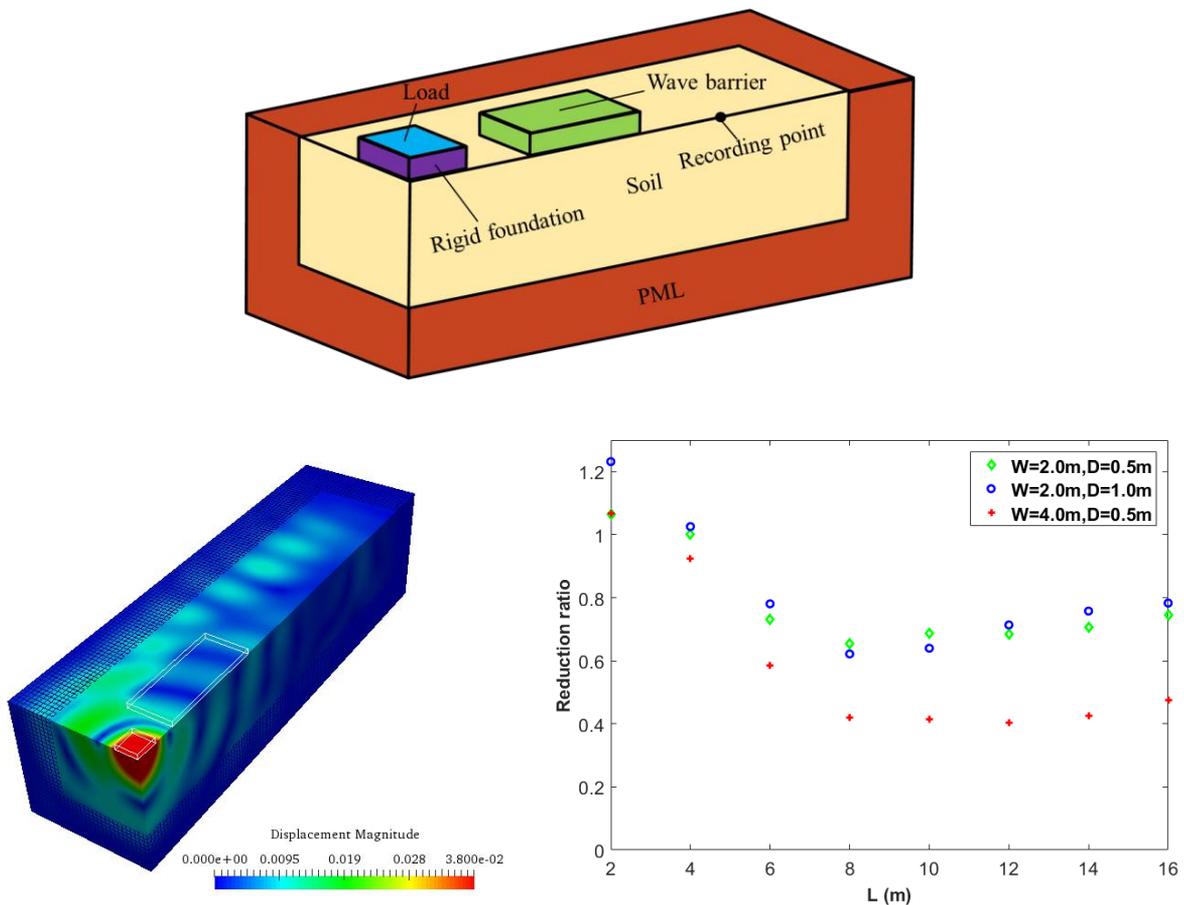


Figure 4. L'effet de l'isolation des barrières d'ondes avec différentes dimensions (L longueur, W largeur, D épaisseur)

5. Conclusion

Une PML (Perfectly Matched Layer) hybride (différents intégrateurs de temps) asynchrone (différents pas de temps) tridimensionnelle est proposée pour reproduire numériquement les domaines infinis dans les problèmes dynamiques transitoires. La formulation 3D des PML est couplée aux autres sous-domaines dans le cadre performant et flexible des méthodes dites HATI (Heterogeneous Asynchronous Time Integrator), permettant d'éviter d'introduire les coordonnées complexes dans le domaine intérieur (hors PML) et de traiter les sous-domaines avec différents intégrateurs temporels associés à différents pas de temps.

Un problème de structure simplifiée sur un sol stratifié et un cas d'étude pour la barrière d'ondes sont mis en œuvre afin d'illustrer l'efficacité de la formulation hybride asynchrone de PML 3D. En termes de temps de calcul normalisé, une réduction importante du temps de calcul peut être obtenue en utilisant multi-pas de temps, soulignant l'intérêt de l'intégration temporelle asynchrone.

6. References

- Bérenger JP. «A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves». *Journal of Computational Physics* 1994; 114:185-200.
- Basu U and Chopra A. «Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2003; 192; 1337-1375.
- Basu U. «Explicit finite element perfectly matched layer for transient three-dimensional elastic waves». *International journal for numerical methods in engineering* 2009; 77:151–176.
- Combesure A and Gravouil A. «A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; 191:1129–1157.
- Gravouil A and Combesure A. «A multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001; 50: 199–225.
- Grau L and Laulagnet B. «Effect of horizontal wave barriers on ground vibration propagation». *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015; 138(3): 1334-45.
- Kosloff D and Kosloff R. «Absorbing boundaries for wave propagation problems». *Journal of Computational Physics* 1986; 63: 363-376.
- Li S, Brun M, Djeran-Maigre I and Kuznetsov S. «Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains». *Computers and Geotechnics* 2019; 109: 69-81.
- Li S, Brun M, Djeran-Maigre I and Kuznetsov S. «Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier». *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 2018.
- Semblat JF, Lenti L and Gandomzadeh A. «A simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2011; 85: 1543-1563.