

MODÉLISATION DE LA FORMATION DES BANDES DE COMPACTION DANS LES ROCHES CARBONATÉES

MODELLING THE FORMATION OF COMPACTION BANDS IN CARBONATE ROCKS

Youssef ABDALLAH¹, Jean SULEM¹, Ioannis STEFANO¹, Michel BORNERT¹, Siavash GHABEZLOO¹

¹ Laboratoire Navier, Ecole des Ponts ParisTech, Université Gustave Eiffel, CNRS, Marne-la-Vallée, France

RÉSUMÉ – La modélisation des bandes de compaction nécessite des lois de comportement incluant des longueurs internes liées à la microstructure. En se basant sur des observations expérimentales montrant le rôle important de l'hétérogénéité de la porosité dans la formation de ces bandes dans les carbonates, un modèle de plasticité du second gradient ainsi qu'une méthode de calage de ses paramètres à partir de techniques d'imagerie sont proposés ici.

ABSTRACT – Modelling the formation of compaction bands requires constitutive laws including internal length that account for the microstructure. Based on experimental observations showing the dominant role of the porosity heterogeneity in the formation of these bands in carbonate rocks, a gradient-dependent plasticity model and a method to calibrate the additional parameters from imaging techniques are proposed in this study.

1. Introduction

Comprendre et modéliser les mécanismes de formation des bandes de compaction dans les roches sédimentaires est un sujet d'intérêt dans de nombreux géosystèmes. Ces bandes de localisation de la déformation sont associées à une forte réduction de porosité et une chute de perméabilité de plusieurs ordres de grandeur. Elles agissent ainsi comme des barrières pour le transport des fluides et par conséquent, le rendement de nombreuses opérations sur les géosystèmes peut être radicalement affecté (par exemple le stockage du CO₂ dans les formations sédimentaires profondes (Rutqvist, 2012)).

La modélisation de la localisation de déformation, et des bandes de compaction en particulier, nécessite des modèles de comportement enrichis qui contiennent une information sur la microstructure du matériau (Sulem et Vardoulakis, 1995). Ces modèles introduisent des degrés de liberté supplémentaires et/ou des gradients de déformation d'ordres supérieurs qui permettent la prédiction des bandes de déformation avec une épaisseur finie. Cependant, une difficulté de ces modèles est d'identifier et de caler les paramètres et de leur donner un sens physique.

L'objectif de cet article est de proposer une loi de comportement tenant compte de la microstructure et de donner une méthode robuste permettant le calage des paramètres du modèle. Un modèle de plasticité du type second-gradient est présenté, où les variables d'érouissage sont la porosité et second gradient, considérés comme deux variables internes indépendantes. Le calcaire de Saint-Maximin, qui provient du bassin carrier de l'Oise, est choisi comme matériau d'étude et des images volumiques obtenues par tomographie aux rayons X sont enregistrées sur des échantillons avant et après l'application de plusieurs paliers de chargement en conditions triaxiales asymétriques. Des cartes de porosité volumiques sont construites à partir des images tomographiques. La technique de Corrélation d'Images Volumiques est appliquée sur les images afin de

construire des cartes tridimensionnelles de déformation. Ces cartes sont utilisées pour caler le modèle de comportement proposé.

2. Matériau et méthodes

Des essais de chargement triaxial asymétrique ont été réalisés sur des échantillons cylindriques d'une hauteur de 8cm et d'un diamètre de 4 cm. Les échantillons sont secs et maintenus à une température constante de 25 °C. Le chargement axial est appliqué avec un taux de déformation constant de 10^{-5} sec^{-1} . Six « *Linear Variable Differential Transformers* (LVDT) » sont disposés autour de l'échantillon testé pour mesurer la déformation globale (deux dans la direction axiale et quatre dans la direction radiale).

Le calcaire de Saint-Maximin est majoritairement formée de calcite (80% de la masse solide) avec une présence de grains de quartz (20%) (Baud et al., 2017). La porosité globale, évaluée par la méthode de pesée hydrostatique, est de 38% en moyenne. Les images tomographiques enregistrées sur les échantillons à l'état initial montrent systématiquement une hétérogénéité de la porosité à l'échelle du centimètre (les niveaux de gris plus et moins clairs représentent les zones plus et moins denses sur la Figure 1.a). En utilisant le logiciel FIJI (Schindelin et al., 2012), la porosité peut être évaluée sur des sous-volumes sphériques dont la taille doit être sensiblement supérieure à la taille caractéristique de la microstructure mais inférieure à la longueur d'onde dominante de l'hétérogénéité de la porosité. Un diamètre de 1 mm a été retenu pour ces sous-volumes. On observe que la porosité dans du calcaire de Saint-Maximin varie entre 35% et 42% (Figure 1.b).

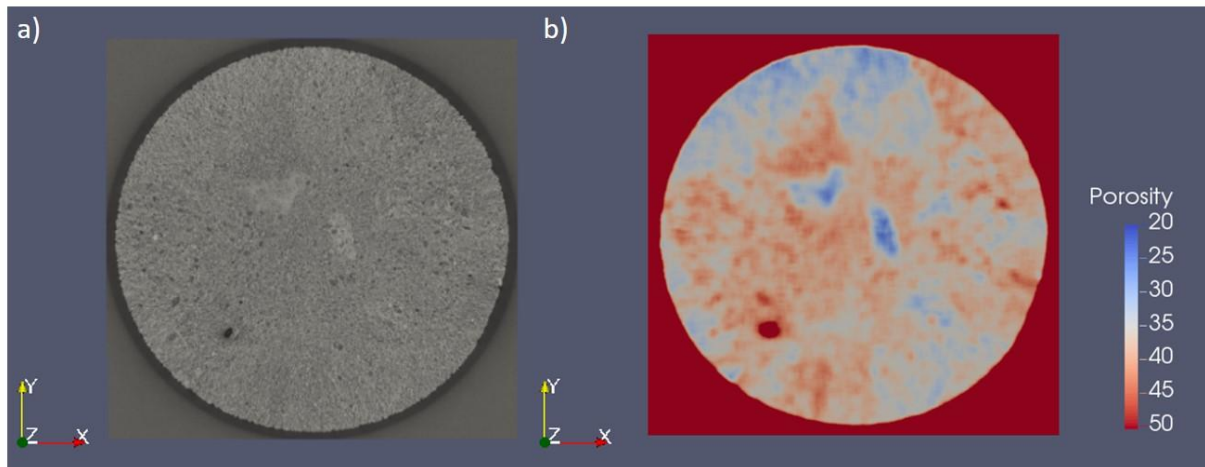


Figure 1. a) Section transverse typique d'un échantillon à l'état initial ; b) Section correspondante de la carte de porosité.

La loi de comportement est formulée dans le cadre de la théorie de plasticité du second-gradient (voir Section 3) et l'évaluation du second gradient de la porosité est requise. Pour cela, un calage de la distribution de la porosité dans un domaine cubique de côté L avec une fonction parabolique qui correspond au développement en série de Taylor du second ordre est réalisé :

$$\phi(\underline{x}) \approx \phi_0 + \underline{\nabla\phi_0} \cdot (\underline{x} - \underline{x_0}) + \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x_0})^t \cdot \underline{\underline{\nabla^2\phi_0}} \cdot (\underline{x} - \underline{x_0}) \quad (1)$$

où \underline{x} et $\underline{x_0}$ représentent les vecteurs positions d'un point quelconque et du centre du domaine cubique respectivement, ϕ_0 , $\underline{\nabla\phi_0}$ et $\underline{\underline{\nabla^2\phi_0}}$ représentent la porosité, son premier gradient et son second gradient (matrice hessienne) évalués au centre du domaine

respectivement. La valeur moyenne de cette distribution de porosité, ainsi que le moment statistique du second ordre peuvent s'exprimer en fonction de la porosité au centre ϕ_0 et son second gradient ($\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}$) :

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \phi(\underline{x}) d\underline{x} = \phi(\underline{x}_0) + \frac{L^2}{24} \nabla^2 \phi(\underline{x}_0) \quad (2)$$

$$\langle \|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2 \cdot \phi \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2 \cdot \phi(\underline{x}) d\underline{x} = \frac{L^2}{4} \cdot \phi(\underline{x}_0) + \frac{19L^4}{1440} \nabla^2 \phi(\underline{x}_0) \quad (3)$$

Un programme en langage python est écrit pour évaluer numériquement ces deux quantités (Equation. 2-3), ce qui permet d'évaluer les variables internes : ϕ_0 et $\nabla^2 \phi(\underline{x}_0)$ qui sera désigné dans la suite par $\nabla^2 \phi_0$.

3. Modèle de plasticité du type second-gradient

L'hétérogénéité de la porosité à l'échelle du centimètre contrôle la formation des bandes de compaction (Abdallah et al., 2019a). Il a été observé que ces bandes se forment dans les zones les plus poreuses, tandis que les zones les plus denses restent quasiment indéformées. De plus, les pores de grande taille qui se trouvent dans les zones les plus denses restent intacts, même à des niveaux de chargement relativement élevés. En effet, ces pores sont protégés par des matrices rigides de grains cimentés qui les entourent. Par conséquent, une approche non locale est adoptée pour modéliser les bandes de compaction. Dans ces approches, l'état de déformation en un point ne dépend pas seulement de ses propriétés locales, mais aussi des propriétés du matériau dans son voisinage (Bésuelle et Rudnicki, 2004). Pour cela, la déformation volumique plastique (identifiée ici à l'évolution plastique de la porosité) et son second gradient sont considérés comme deux variables internes indépendantes. La surface de charge F s'écrit alors :

$$F = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_v^{pl}, \nabla^2 \varepsilon_v^{pl}) = 0 \quad (4)$$

En outre, on considère un potentiel plastique g non associé avec une loi simple du type Drucker-Prager :

$$g = \beta \cdot p + q \quad (5)$$

avec p la contrainte moyenne, q la contrainte déviatorique et β le coefficient de dilatance. En considérant la loi d'élasticité et la règle d'écoulement, et en négligeant le second gradient de la déformation volumique élastique $\nabla^2 \varepsilon_v \approx \nabla^2 \varepsilon_v^{pl}$ (ce qui signifie que la déformation élastique est supposée homogène), un modèle du type second-gradient s'obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl}^e - \langle 1 \rangle \frac{b_{ij}^g b_{kl}^f}{H_1}) \dot{\varepsilon}_{kl} - \langle 1 \rangle \frac{b_{ij}^g}{H_1} \frac{\partial F}{\partial \nabla^2 \varepsilon_v^{pl}} \nabla^2 \dot{\varepsilon}_v \quad (6)$$

où $b_{ij}^g = C_{ijkl}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}$; $b_{kl}^f = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e$; $H_1 = b_{kl}^f \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p}$ et $\langle 1 \rangle$ représente les crochets de Macaulay, qui est égale à 1 dans le régime plastique et 0 dans le régime élastique.

4. Calage du modèle

4.1. La composante de Cauchy

La loi de comportement présentée n'est qu'une extension d'une relation standard dans une formulation classique de Cauchy (sans les termes de gradients). Le calage de la composante macroscopique (Cauchy) est réalisé dans une première étape. Une série d'essais triaxiaux sous divers niveaux de confinement est réalisée et les limites d'élasticité correspondantes sont groupées avec les données de Baud et al., 2009 et Baud et al., 2017 dans la Figure 2.a. De plus, deux essais brésiliens ont été réalisés pour caractériser la résistance en traction. Une surface de charge du type « *Asymmetric Cam Clay (ACC)* » (Equation. 7) est calée avec les données de la Figure 2.b (Tableau 1).

$$F = q^2 e^{k\chi} + M^2(p - p_c)(p + p_t) = 0 \quad (7)$$

avec $\chi = \frac{2p - p_c + p_t}{p_c + p_t}$ est une contrainte moyenne normalisée.

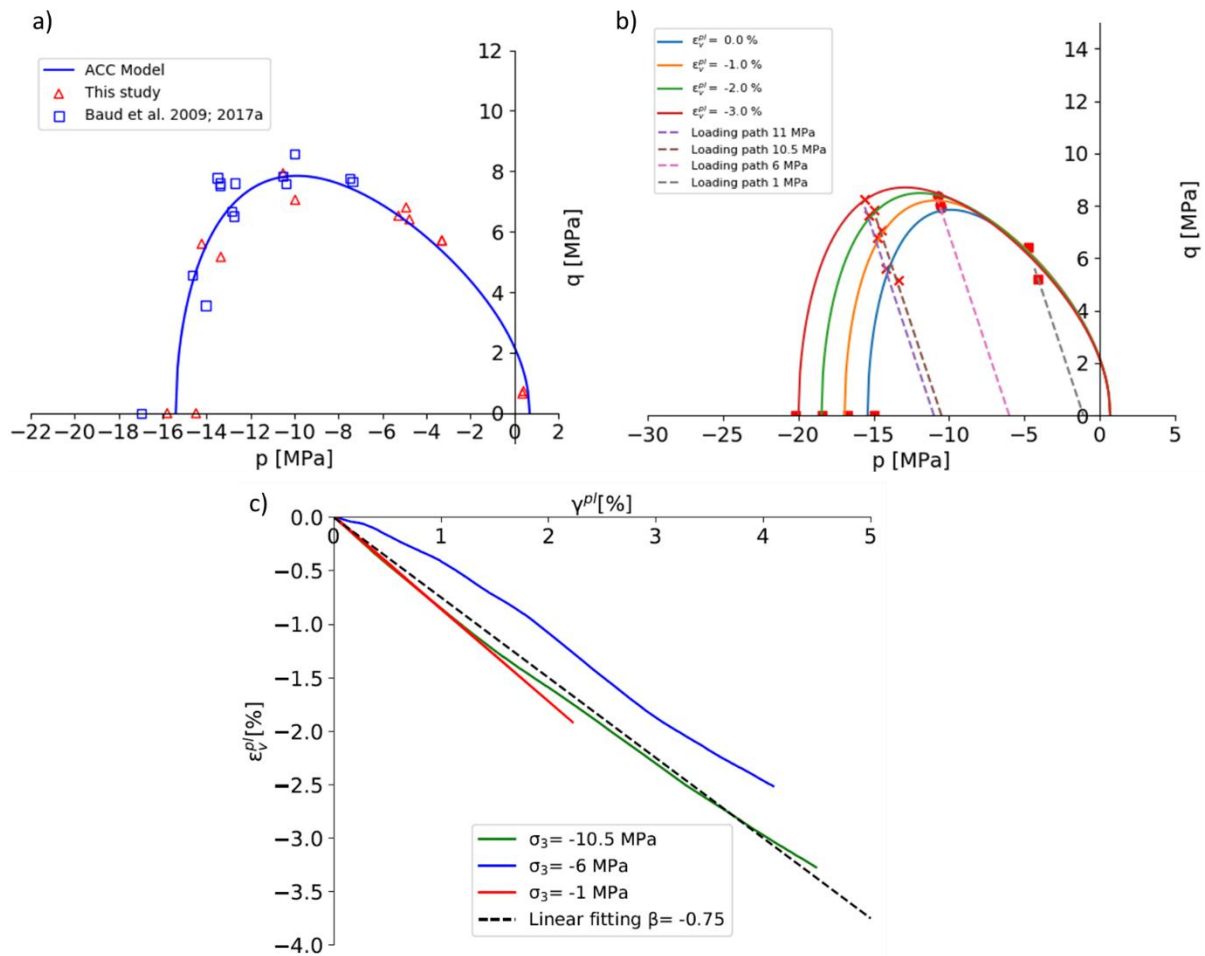


Figure 2. a) Surface de charge du type ACC calée aux valeurs des limites d'élasticité ; b) Evolution de la surface de charge dans le régime plastique avec des lois d'écroûissage linéaires ; c) Calage du paramètre de dilataance à partir des mesures des LVDT.

L'évolution de la surface de charge est modélisée en considérant deux lois d'écroissements linéaires sur les variables p_c et M , où la déformation volumique plastique ε_v^{pl} (mesurée à travers les LVDT) est considérée comme la seule variable interne ici. Les résultats des calages (Figure 2.b) sont donnés dans les Equations. 8-9. Ces simples lois permettent de modéliser un durcissement global sous forts confinements, un radoucissement sous faibles confinements et un comportement élasto-plastiques parfait dans le régime transitoire. En ce qui concerne le potentiel plastique, le calage du paramètre de dilatance β est réalisé en utilisant les données des déformations volumique et déviatorique obtenues par les LVDT. Une valeur constante de -0,75 est adoptée (Figure 2.c).

$$\dot{p}_c = h_1 \dot{\varepsilon}_v^{pl} \quad (8)$$

$$\dot{M} = h_2 \dot{\varepsilon}_v^{pl} \quad (9)$$

Avec $h_1 = 153$ MPa et $h_2 = 4,21$.

Tableau 1. Paramètres calés

$k[-]$	$M[-]$	p_c [MPa]	p_t [MPa]
-0,7	0,92	-15,4	-0,7

4.2. Lois d'écroissage et second-gradient de porosité

La surface de charge dépend de l'évolution plastique de la porosité (identifiée avec la déformation volumique plastique) et son second-gradient. Par analogie avec les lois d'écroissements macroscopiques (Equations. 8-9), les lois enrichies sont supposées dépendre maintenant de l'évolution moyenne de porosité, dont l'expression est donnée dans l'équation 2. Par conséquent, les lois d'écroissage enrichies peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\dot{p}_c = \alpha_1 \left(\dot{\phi}_0 + \frac{L^2}{24} \nabla^2 \phi_0 \right) \quad (10)$$

$$\dot{M} = \alpha_2 \left(\dot{\phi}_0 + \frac{L^2}{24} \nabla^2 \phi_0 \right) \quad (11)$$

où α_1 et α_2 sont les deux nouveaux modules d'écroissage à caler, outre la longueur interne L .

Dans ce but, un échantillon est testé sous chargement triaxial à un niveau de confinement relativement élevé (10,5 MPa). Le chargement est appliqué en deux paliers (Figure 3.a) et une image volumique est enregistrée à l'état initial, après le premier et le deuxième paliers de chargement. La corrélation d'image volumique est donc appliquée deux fois et la déformation est calculée pour un élément de taille 1 mm, en utilisant le logiciel CMV3D (Bornert et al., 2004). Les cartes de déformation volumique incrémentale pour les deux étapes de chargement sont montrées dans la Figure 3.b-c (un incrément correspond à une étape de chargement). Plusieurs bandes de compaction sont observées au seuil de plasticité. Ces bandes deviennent de plus en plus épaisses au fur et à mesure du chargement.

La première étape de la procédure de calage ici est d'identifier la longueur interne L . Cette longueur représente la longueur du domaine cubique sur lequel le second-gradient de porosité est évalué. L'hétérogénéité de la porosité est schématiquement modélisée par

une alternance entre des zones plus et moins poreuses de formes cubiques de côté $L/2$ (Figure 4.a). Un domaine cubique de côté L centré sur une zone de haute-porosité peut être considéré comme un Volume Élémentaire Représentative (VER), sur lequel le modèle sera calé. Pour déterminer cette longueur, plusieurs profils de porosité sont tracés le long de lignes définies suivant différentes orientations (par exemple les lignes L1 à L4 dans la Figure 4.b). La transformée de Fourier rapide est ensuite appliquée sur ces profils afin d'identifier la longueur d'onde dominante de l'hétérogénéité (par exemple ligne 1 dans la Figure 4.c). On obtient une valeur de 24 mm (qui correspond à une fréquence de $0,0417 \text{ mm}^{-1}$).

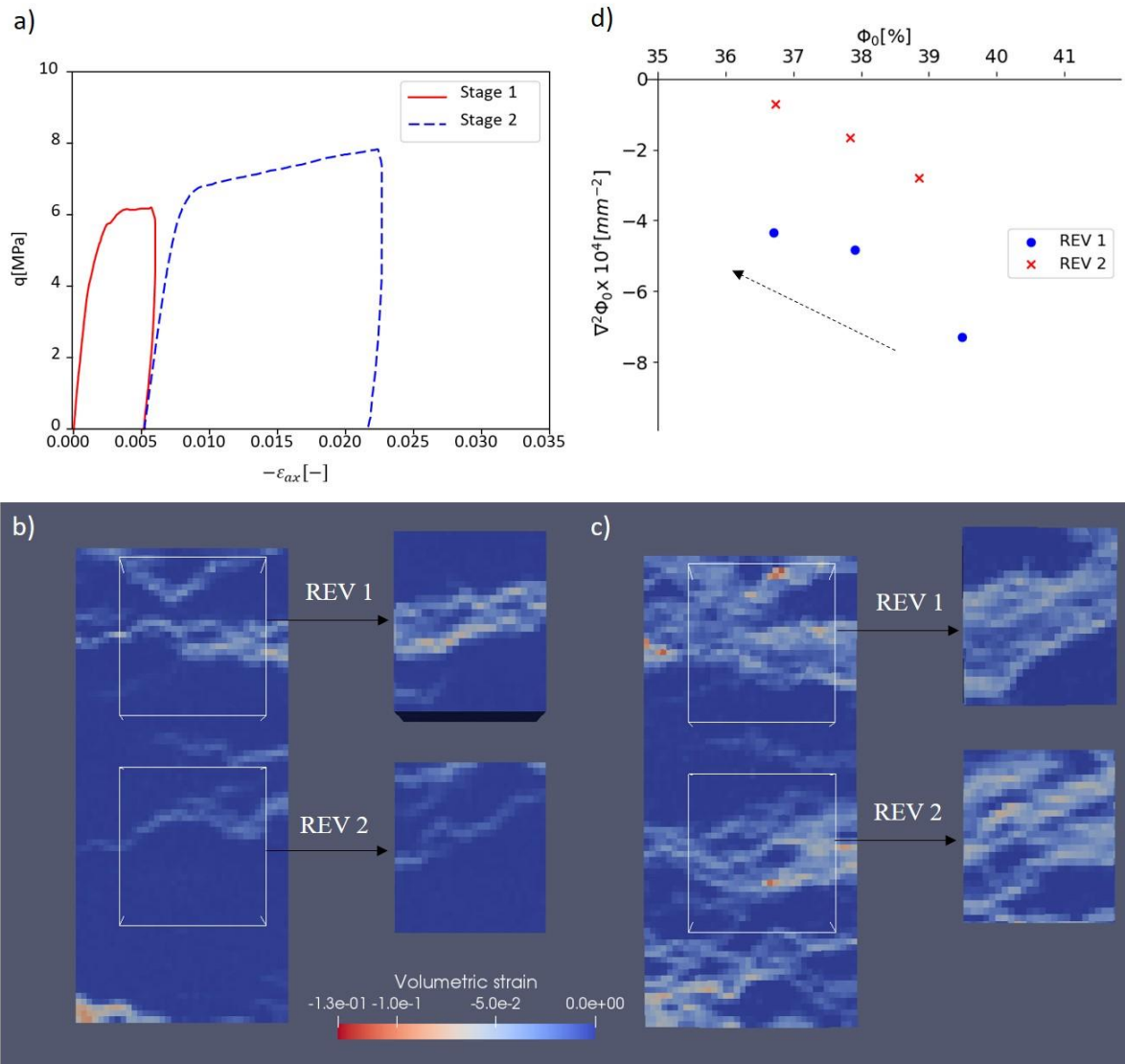


Figure 3. a) Un échantillon testé sous chargement triaxial à un niveau de confinement élevé (10,5 MPa) ; b-c) Sections verticales des cartes de déformation volumique incrémentale correspondant au premier et deuxième paliers de chargement respectivement ; d) Porosité et son second-gradient évalués pour deux domaines cubiques sélectionnés à l'intérieur de l'échantillon à l'état initial, après le 1er et 2ème palier de chargement.

Afin de compléter le calage du modèle, deux volumes élémentaires représentatifs (VER) centrés sur des zones de forte porosité sont sélectionnés. La porosité et son second gradient correspondants sont évalués et présentés sur la Figure 3.d. On observe qu'au cours de la localisation, la porosité décroît et le matériau devient de plus en plus homogène. La déformation volumique plastique moyenne est calculée sur ces deux VER en utilisant le logiciel Paraview (Tableau 2). Les lois d'écroissements macroscopiques

(Equations. 8-9) sont utilisées afin d'évaluer les incréments des variables p_c et M . Ces valeurs permettent de caler les modules $\alpha_1 = 150,9$ MPa et $\alpha_2 = 4,15$ (Figure 5).

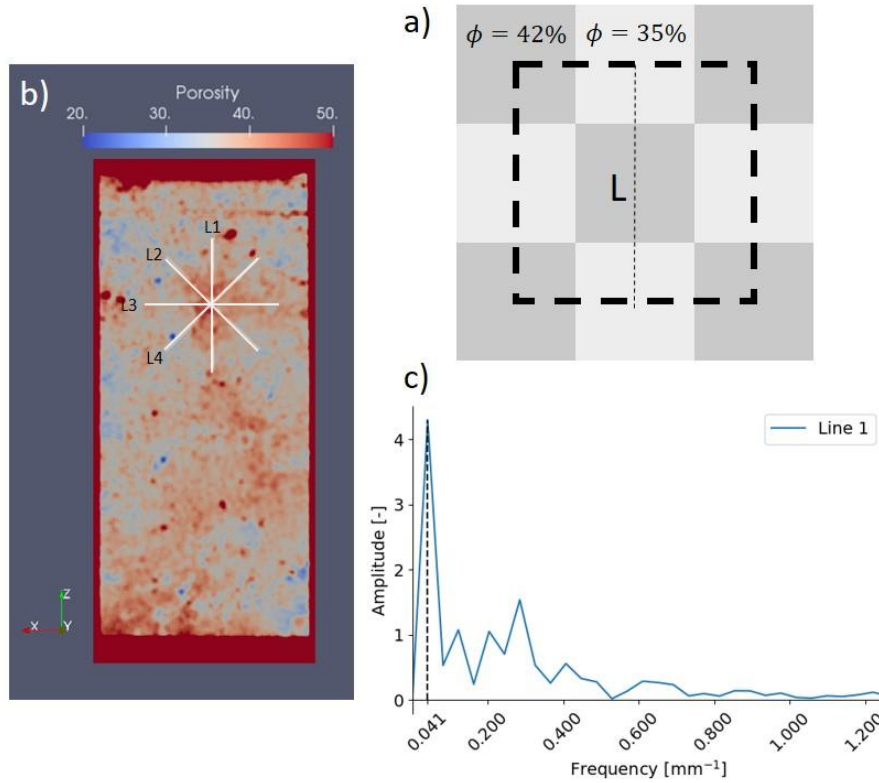


Figure 4. a) Représentation schématique de l'hétérogénéité de la porosité ; b) Section verticale de la carte de porosité de l'échantillon à l'état initial. Les profils de porosité sont tracés tout au long de plusieurs lignes (L1 jusqu'à L4) ; c) Transformée de Fourier rapide appliquée au profil au niveau de la ligne L1.

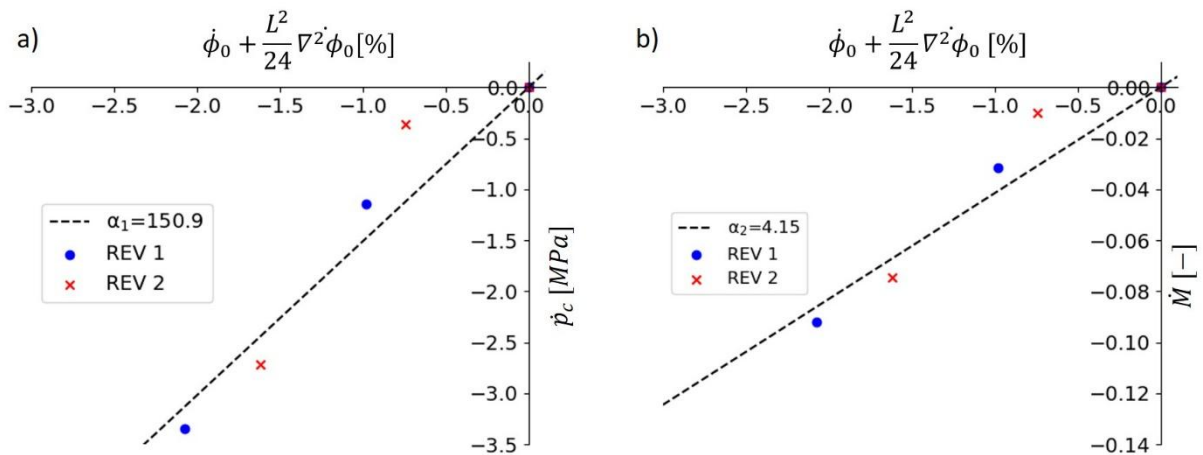


Figure 5. Calage des lois d'écroutissement enrichies

Tableau 2. Déformation volumique plastique incrémentale moyenne calculée à partir des cartes de déformation pour les deux domaines cubiques sélectionnés

VER	$\langle \epsilon_v^{pi} \rangle$ [%] au cours du 1 ^{er} palier de chargement	$\langle \epsilon_v^{pi} \rangle$ [%] au cours du 2 ^{ème} palier de chargement
-----	--	---

1	-0,74	-1,44
2	-0,24	-1,54

5. Conclusions

A partir d'observations expérimentales, un modèle de plasticité du type second-gradient est proposé, où la porosité et son second-gradient sont considérés comme deux variables internes. Ce modèle, tient compte de l'hétérogénéité de porosité et introduit, en plus des paramètres de plasticité standards, une longueur interne L et une variable interne supplémentaire $\nabla^2\phi$. Une procédure de calage est développée où la composante standard de Cauchy est calée avec les données mesurées par les LVDT en premier lieu. Ensuite, la transformée de Fourier est appliquée sur les profils de porosité afin de sélectionner la longueur interne adéquate du modèle. De plus, une nouvelle méthode permettant l'évaluation du second gradient de porosité à partir des images volumiques est développée, ce qui permet de caler les lois d'érouissages.

La loi de comportement proposée a été par ailleurs implémentée dans un logiciel de calcul aux éléments finis, *Numerical Geolab* (Stefanou, 2018), afin de simuler numériquement la formation et l'évolution des bandes de compaction (Abdallah et al., 2019b).

6. Références bibliographiques

- Abdallah, Y., Sulem, J., Bornert, M., Ghabezloo, S., & Stefanou, I. (2019a). Compaction banding in triaxial experiments on a high porosity limestone. *Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development. Proceedings of the 14th International Congress on Rock Mechanics and Rock Engineering (ISRM 2019)*, September 13-18, 2019, Foz do Iguassu, Brazil. CRC Press.
- Abdallah, Y. (2019b). Compaction banding in high porosity carbonate rocks: Experimental observations and modelling. PhD diss., Université Paris-Est.
- Baud, P., Vinciguerra, S., David, C., Cavallo, A., Walker, E., & Reuschlé, T. (2009). Compaction and failure in high porosity carbonates: Mechanical data and microstructural observations. *Pure and Applied Geophysics*, 166(5-7), 869-898.
- Baud, P., Schubnel, A., Heap, M., & Rolland, A. (2017). Inelastic Compaction in High-Porosity Limestone Monitored Using Acoustic Emissions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122(12), 9989.
- Bésuelle, P., & Rudnicki, J. W. (2004). Localization: shear bands and compaction bands. *INTERNATIONAL GEOPHYSICS SERIES.*, 89, 219-322.
- Bornert, M., Chaix, J. M., Doumalin, P., Dupré, J. C., Fournel, T., Jeulin, D., ... & Moulinec, H. (2004). Mesure tridimensionnelle de champs cinématiques par imagerie volumique pour l'analyse des matériaux et des structures. *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, 4(3-4), 43-88.
- Rutqvist, J. (2012). The geomechanics of CO₂ storage in deep sedimentary formations. *Geotechnical and Geological Engineering*, 30(3), 525-551.
- Schindelin, J., Arganda-Carreras, I., Frise, E., Kaynig, V., Longair, M., Pietzsch, T., ... & Tinevez, J. Y. (2012). Fiji: an open-source platform for biological-image analysis. *Nature methods*, 9(7), 676.
- Stefanou, I. (2018), *Numerical Geolab: Multiscale Finite Elements platform for multiphysics couplings and generalized continua (CoQuake project, www.coquake.eu)*
- Sulem, J., & Vardoulakis, I. G. (1995). *Bifurcation analysis in geomechanics*. CRC Press.