# DISCUSSION SUR LA DEFINITION D'UN FACTEUR DE SECURITE PAR ELEMENTS FINIS, TRANSITION STATIQUE DYNAMIQUE

## *DISCUSSION ON THE DEFINITION OF A SAFETY FACTOR BY FINITE ELEMENTS, STATIC-DYNAMIC TRANSITION*

Florent PRUNIER[1], Denis BRANQUE[2]
*[1] Laboratoire GEOMAS, Université de Lyon, INSA Lyon, Villeurbanne, France*
*[2] LTDS, Université de Lyon, ENTPE, Vaulx-en-Velin, France*

**RÉSUMÉ –** Cet article propose une méthode pour décrire une rupture globale en géomécanique par la méthode des éléments finis. Avec une approche quasi statique, il est impossible de décrire correctement un état limite avant que la divergence numérique du calcul ne soit atteinte. L'idée principale de ce travail est d'utiliser une approche dynamique pour détecter la perte d'équilibre d'un problème quasi statique.

**ABSTRACT –** This paper proposes a method to describe a global failure in geomechanics using the finite element method. With a quasi-static approach, it is impossible to correctly describe a limit state before the numerical divergence of the calculation is reached. The main idea of this work is to use a dynamic approach to detect the loss of equilibrium of a quasi-static problem.

## 1. Introduction

La description d'un état ultime d'une géostructure en utilisant la méthode des éléments finis est délicate. En effet dans le cas d'une approche quasi-statique en élasto-plasticité des problèmes numériques (divergence de calcul) interviendront avant d'atteindre l'état d'équilibre limite théorique. D'autre part la définition d'un facteur de sécurité classique ainsi que la définition d'une limite de rupture basée sur une limite de plasticité donnent une mesure de la distance entre l'état actuel de la géostructure et l'état de ruine. Néanmoins ces critères ne prennent pas bien en compte la direction du chargement appliquée. Ainsi nous proposons d'étudier la stabilité d'un ouvrage en se basant sur le critère du travail du second ordre : au niveau local (point de Gauss) pour détecter l'évolution des zones instables, et intégrer sur tout le maillage afin d'en tirer une forme de facteur de sécurité global. L'algorithme *H.H.T.* (Hilber et al., 1977) de type (Newmark, 1959) intégrant les équations de la dynamique est utilisé pour nos problèmes quasi-statiques afin de capturer l'instant de la perte d'équilibre.

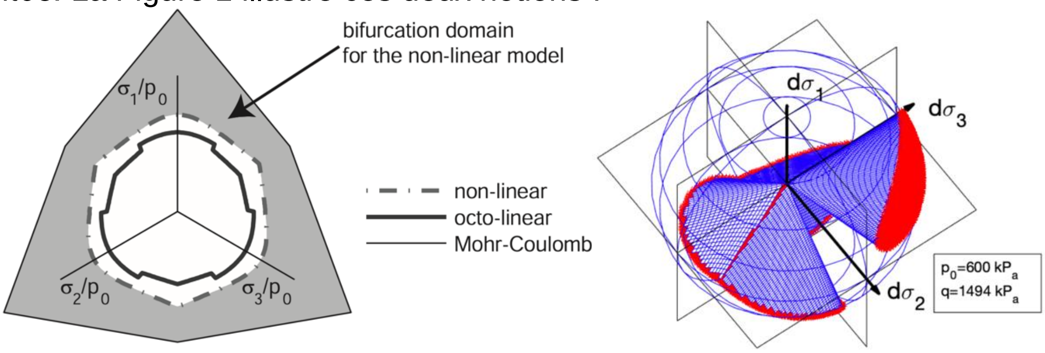
## 2. Rappels théoriques sur le critère du travail du second ordre

### 2.1. A l'échelle locale : Volume Élémentaire Représentatif (VER)

Ce critère stipule que si le travail du second ordre est strictement positif alors le matériau est dans état stable.

$$w_2 = d\boldsymbol{\sigma}^t \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \tag{1}$$

Une étude approfondie de ce critère (Prunier et al., 2009a ; Prunier et al. 2009b) permet de montrer qu'il est capable de décrire les instabilités et ruptures qui peuvent se produire avant d'atteindre la limite de Mohr-Coulomb et qu'il prend en compte la direction du chargement actuel. Il permet de définir un *domaine de bifurcation* : espace des contraintes dans lequel des instabilités peuvent se produire avant la limite de Mohr-Coulomb, et de définir les directions de chargements instables en tout point de ce domaine : *cônes d'instabilités*. La Figure 1 illustre ces deux notions :




(a) (b)

Figure 1: (a) Domaine de bifurcation. (b) cônes de directions de chargements instables pour un état de contrainte dans le domaine de bifurcation

### 2.2. A l'échelle globale : celle d'un ouvrage

L'intégration sur tout le volume de $w_2$ donne un scalaire représentatif de la stabilité de l'ouvrage dans la direction du chargement actuel. L'expression du critère est le suivant (Prunier et al., 2016 ; Prunier et Branque, 2019) :

$$W_{2n} = \frac{\int_\Omega d\sigma^t \cdot d\varepsilon \, d\Omega}{\int_\Omega \|d\sigma\| \cdot \|d\varepsilon\| d\Omega} > 0 \tag{2}$$

Par ailleurs, avec des conditions aux limites qui permettent le développement d'une rupture avec perte d'équilibre, on peut prouver la relation suivante entre le travail du second ordre global $W_2$ et l'énergie cinétique de l'ouvrage $E_C$ :

$$E_c(t + dt) \approx \frac{2}{\Delta t^2}(-W_2) \tag{3}$$

Sur cette équation (3), on voit aisément que si l'ouvrage est à l'équilibre à l'instant *t*, les deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il le perde à *t+dt* sont que :

a. $W_2<0$
b. les conditions limites permettent la rupture avec perte d'équilibre

## 3. Illustration sur des essais triaxiaux homogènes

Dans cette partie et celles qui suivent on présente une série de simulations effectuées avec le logiciel Abaqus®. La loi de comportement PLASOL (Barnichon, 1998) qui présente des caractéristiques similaires au modèle HSM de Plaxis® a été implémentée et utilisée. Le solveur *H.H.T*. (Hilber et al., 1977) est utilisé pour résoudre le problème sous formulation dynamique.

### *3.1 cas de l'essai consolidé non drainé*

Sur ce type d'essai, le pic du déviateur de contraintes peut être atteint avant la limite de de Mohr-Coulomb pour des matériaux lâches ou normalement consolidés. A ce pic, si on pilote le déviateur de contraintes, plutôt que la déformation axiale, une rupture *diffuse* (c'est à dire un effondrement sans faciès de localisation) apparaît. La réponse du modèle éléments finis à ce type d'essais est présenté sur la Figure 2 :

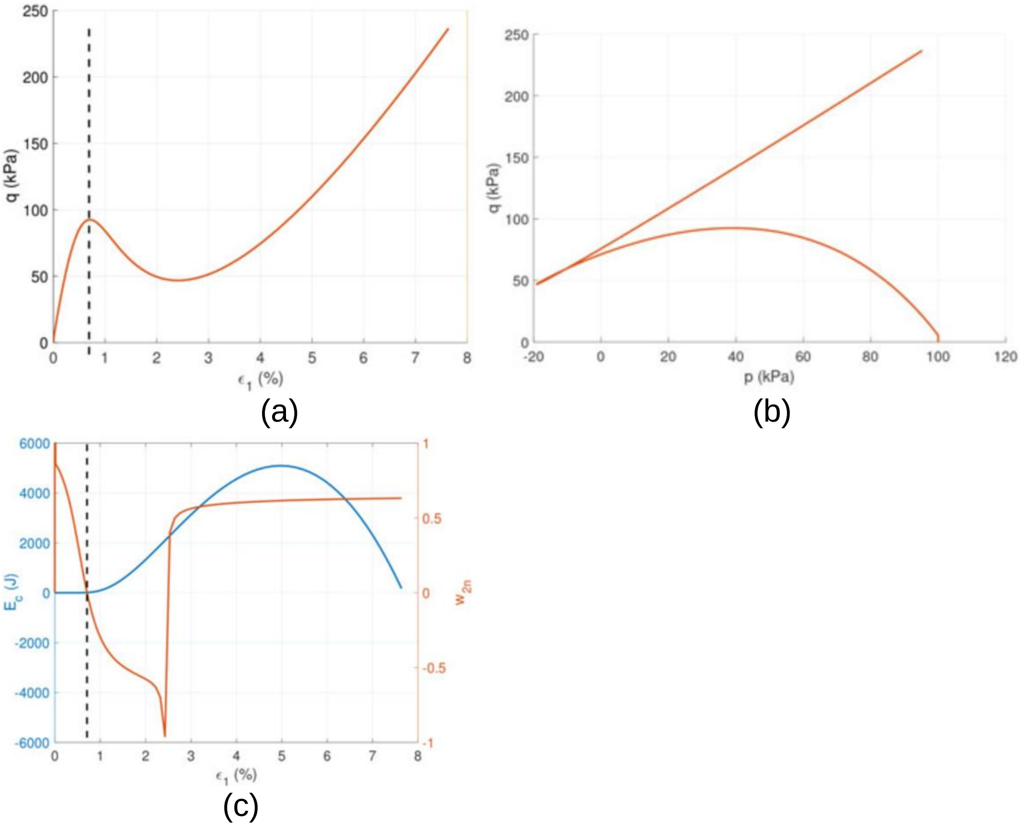



Figure 2: Simulation d'un essai triaxial consolidé non drainé sur un matériau normalement consolidé. (a) réponse de l'échantillon dans le plan (déviateur - déformation axiale). (b) réponse de l'échantillon dans le plan (déviateur - contrainte moyenne). (c) évolutions de l'énergie cinétique et du travail du second ordre normalisé au cours de la simulation.

On vérifie aisément que la théorie présentée en première partie est bien vérifiée sur cette simulation : Avant le pic de *q* à *0.8%*, l'essai est bien quasi-statique, et l'échantillon stable avec $w_2>0$. Au pic de q, le matériau ne peut plus soutenir l'augmentation de déviateur imposée aux limites. $w_2=0$, $E_c$ croit de manière quadratique comme prévu dans l'Équation 3. La réponse du modèle quelques instants après cette perte d'équilibre n'est plus nécessairement pertinente physiquement. En effet, la réponse à un tel événement est très instable expérimentalement.

Enfin il faut noter que sur le même problème piloté en déformation axiale cette fois, l'échantillon de sol est bien instable, voir en état de rupture dès le pic de *q* même si l'équilibre est conservé grâce aux conditions limites. En effet physiquement, une perturbation faible peut faire s'effondrer l'échantillon à tout moment à partir de cet état.

Les modèles classiques ne détectent pas cette instabilité, mais le travail du second ordre est bien nul au pic puis négatif après.

### *3.2 cas de l’essai drainé*

Sur un tel essai, l’échantillon reste stable jusqu’au pic de q qui correspond à la limite de Mohr-Coulomb. Le modèle utilisé ne permet pas de décrire un radoucissement. La limite de plasticité est atteinte de manière asymptotique avec une évolution hyperbolique. Ainsi w2 ne peut s’annuler que sur la limite de plasticité. La réponse du modèle à ce type d’essai est présentée sur la Figure 3.

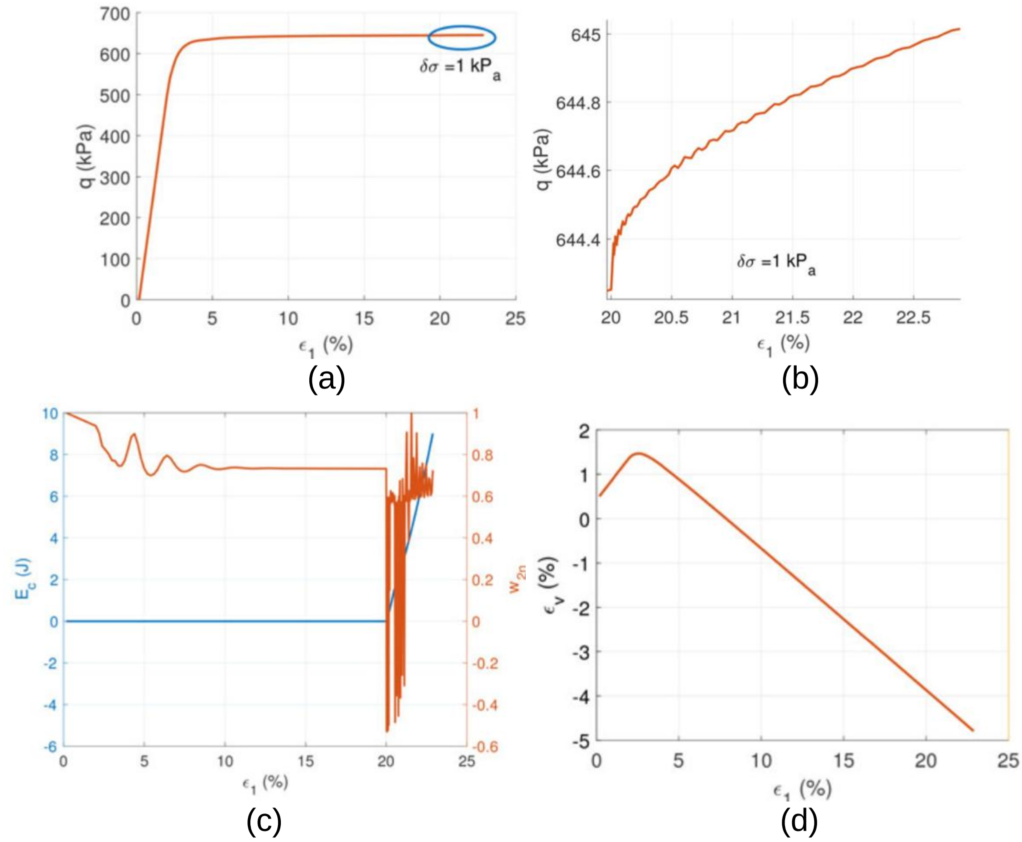



Figure 3: Réponse du modèle au chemin triaxial drainé pour un matériaux dense ou sur-consolidé. (a) réponse de l’échantillon dans le plan (déviateur – déformation axiale). (b) zoom du graphique (a) autour de la zone de perte d’équilibre. (c) évolutions de l’énergie cinétique et du travail du second ordre normalisé durant la simulation. (d) réponse de l’échantillon dans le plan (déformation volumique – déformation axiale).

La réponse du modèle est en adéquation avec la théorie tant que l’on reste dans la limite de plasticité. Mais au moment, où un incrément de contrainte a été imposé pour dépasser cette limite le schéma numérique présente quelques instabilités : $w_2$ s’annule à cet instant, mais est chaotique dans le régime dynamique, et l’évolution de $E_c$ est bien croissante mais pas de manière quadratique à l’instant de la perte d’équilibre. Ainsi, l’écriture du problème en dynamique dans ce cas-ci, permet de bien décrire l’instant de la perte d’équilibre, mais pas d’éviter totalement les problèmes numériques. Ceci est probablement dû à l’incapacité du modèle de décrire un milieu non continu au moment de la rupture.

## 4. Illustration sur problème aux limites

On présente dans cette partie une simulation d’une boite à sable initialement horizontale que l’on incline au fur et à mesure afin de déclencher une avalanche. D’un point de vue numérique la rotation de la boite est simulée en inclinant le vecteur champ de gravité sans incliner physiquement le modèle. La Figure 4 présente la géométrie ainsi que les conditions aux limites du modèle.

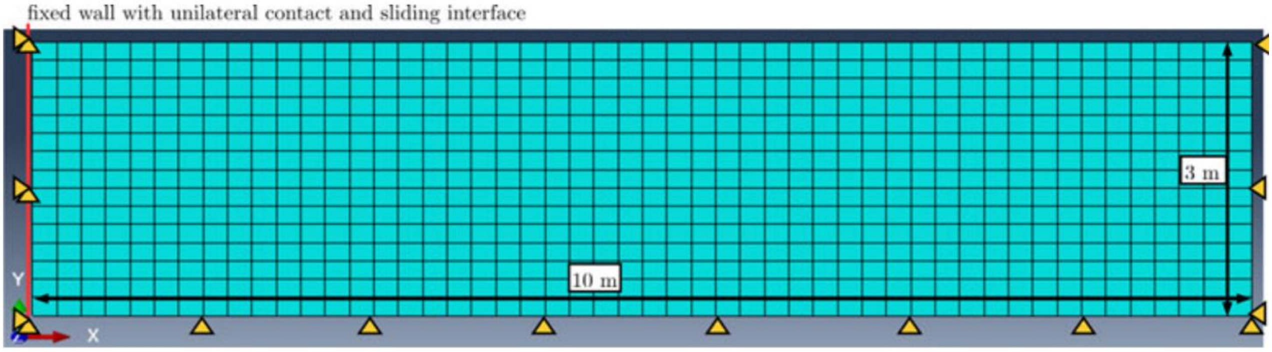



Figure 4: Géométrie et conditions aux limites de la boite à sable

Les propriétés mécaniques du sable sont présentées dans le Tableau 1.

Tableau 1. Propriétés mécaniques du sable

| γ | E | ν | $C_0$ | $C_F$ | $\varphi_0$ | $\varphi_f$ | $B_P$ | $\psi_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 kN/M$^3$ | 20 MP$_a$ | 0.35 | 1 kP$_a$ | 1 kP$_a$ | 4° | 34° | 0.003 | 7° |

Sur la Figure 5 on présente les résultats globaux en termes de $W_{2n}$ et $E_C$ en fonction de l'inclinaison de la boite.

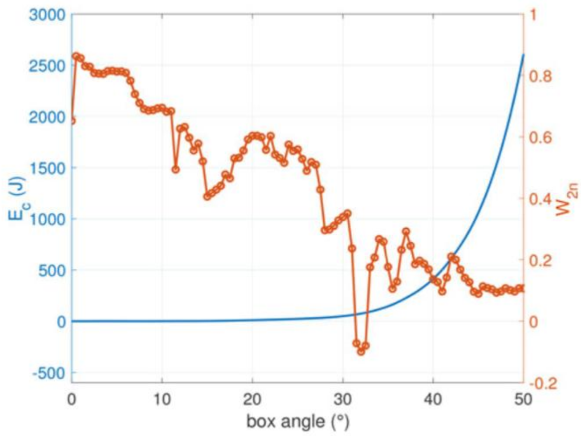



Figure 5: Réponse du modèle en termes d'énergie cinétique et travail du second ordre en fonction de l'inclinaison de la boite

Globalement ces résultats sont en adéquation avec la théorie présentée. Dans les détails, l'énergie cinétique commence à augmenter un peu avant l'annulation du travail du second ordre global et un peu avant 30°, là où on s'attendait plutôt à une rupture un peu après 34° compte tenu de l'angle de frottement interne et de la légère cohésion imposés. Comme dans le cas de l'essai homogène, ces imprécisions sont très probablement liées à la formulation intrinsèquement continue du problème éléments finis, là où au moment d'une rupture et d'une perte d'équilibre, les discontinuités devraient pouvoir être prises en compte. Néanmoins, la formulation dynamique du problème permet d'éviter la divergence du calcul de manière prématurée. Ainsi, un coefficient de sécurité global peut être calculé plus précisément.

D'un point de vue local il est aussi intéressant de regarder l'évolution du champ du travail du second ordre normalisé $w_{2n}$ ainsi que l'évolution du champ de la contrainte de cisaillement actuelle relative à celle de la rupture comme présenté sur la Figure 6.

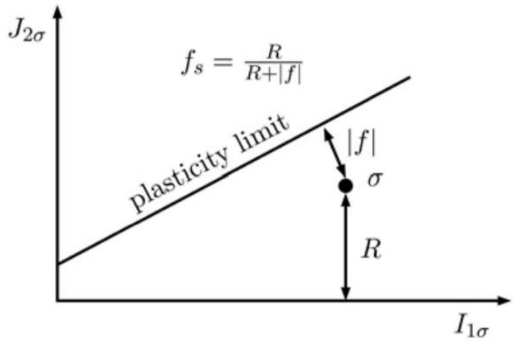



Figure 6: Contrainte de cisaillement relative notée $f_s$ (comprise entre 0 et 1)

L'évolution de ces champs permet d'avoir une idée qualitative du développement des zones instables lors du chargement. La Figure 7 présente cette évolution pour trois valeurs distinctes de $\theta$ du champ $f_s$ et la Figure 8 l'évolution du champs $w_{2n}$ pour ces mêmes valeurs de $\theta$.

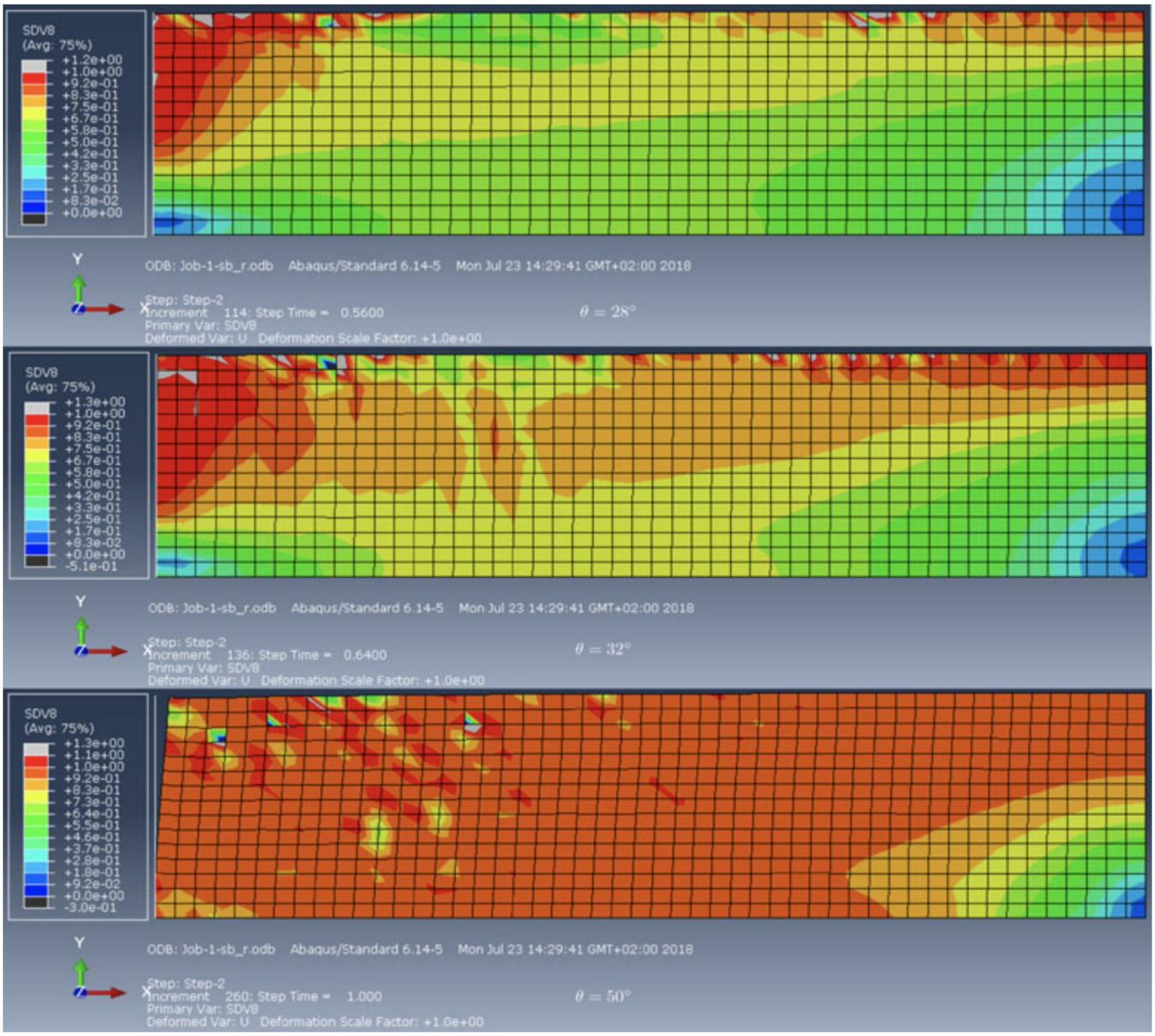



Figure 7: Champ de $f_s$ pour $\theta = 28°$, $32°$ et $50°$

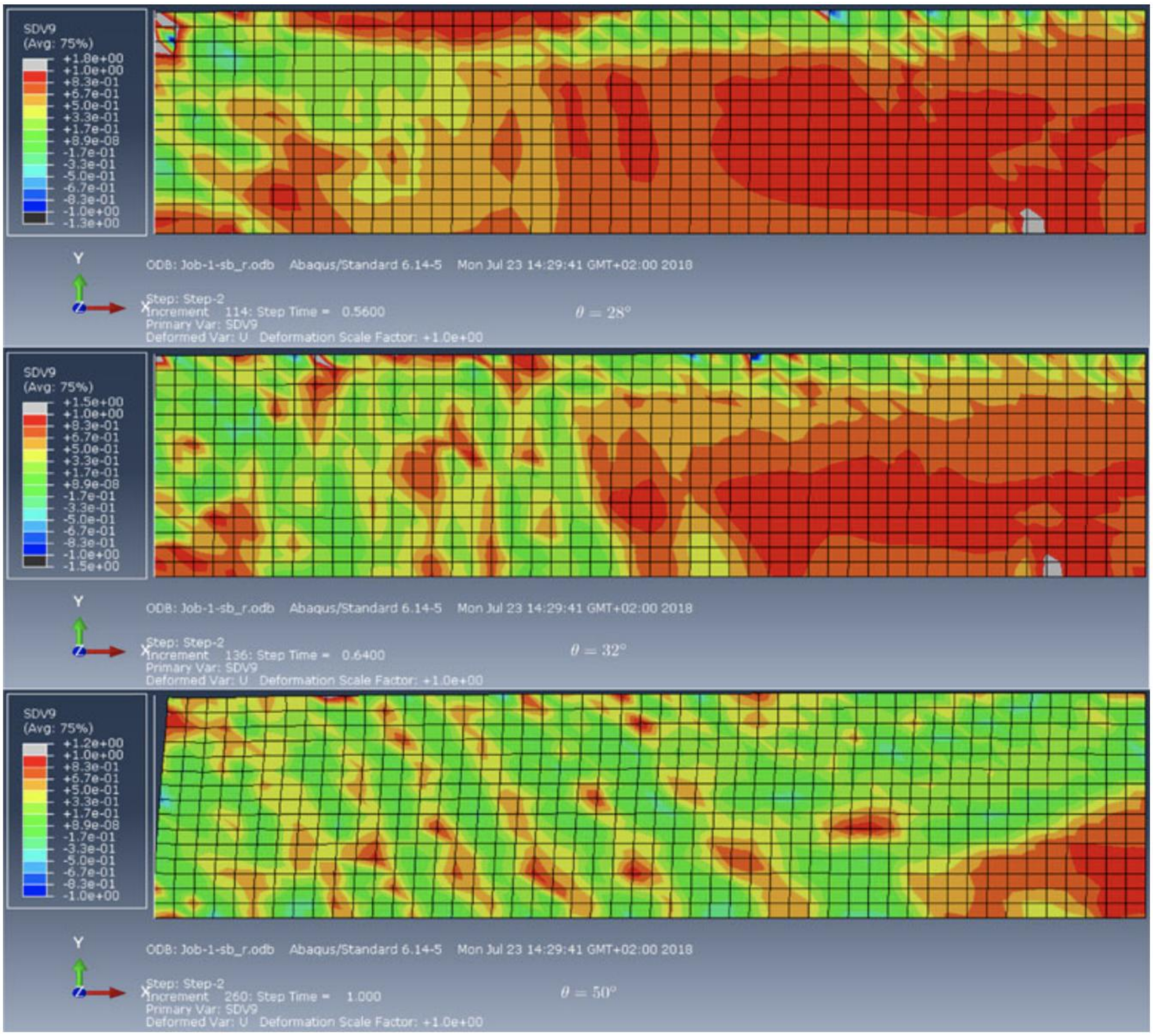



Figure 8: Champ de $w_{2n}$ pour $\theta$ = *28°, 32°* et *50°*

## 5. Conclusions

La formulation d'un problème quasi statique en dynamique par la méthode des éléments finis permet de définir un état limite de manière plus précise qu'avec une formulation statique classique. Le critère du travail du second ordre global est un indicateur scalaire très pertinent pour détecter cet état limite. Néanmoins, ce critère (comme tous les autres) ne permet pas de palier aux hypothèses restrictives d'une formulation physique. Ainsi son exploitation peut être rendu délicate si la formulation physique adoptée ne permet pas de décrire tous les phénomènes attendus. Par exemple, un phénomène de rupture avec localisation des déformations sera mal décrit par une formulation classique éléments finis et ce n'est pas un critère de rupture ou de stabilité qui pourra palier ce défaut de formulation.

Enfin nous insistons sur le fait que le critère du travail du second ordre reste pratiquement le critère le plus pertinent pour décrire toute forme de développement d'instabilité ou de rupture dans les géomatériaux. Dans la pratique de l'ingénierie, nous recommandons vivement son utilisation de manière complémentaire aux critères utilisés, en particulier de l'utiliser avec le critère de l'énergie cinétique pour définir plus précisément l'état limite de l'ouvrage étudié. De là un facteur de sécurité classique peut être calculé de manière conventionnelle.

## 6. Références bibliographiques

Barnichon, J. D. (1998). Finite element modelling in structural and petroleum geology (Unpublished doctoral dissertation). Univeritée de Liège, Belgique.

Hilber, H., Hughes, T., & Taylor, R. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 5(3), 283–292. doi:10.1002/eqe.4290050306

Newmark, N. (1959). A method of computation for structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics, 85(3), 67–94.

Prunier, F., Branque, D. (2019). Definition of a safety factor using the finite element method in geomechanics, from a static to dynamic regime, European Journal of Environmental and Civil Engineering, DOI: 10.1080/19648189.2019.1650119

Prunier, F., Chomette, B., Brun, M., & Darve, F. (2016). Designing geotechnical structures with a proper stability criterion as a safety factor. Computers and Geotechnics, 71, 98–114. doi:10.1016/j.compgeo.2015.09.007

Prunier, F., Laouafa, F., & Darve, F. (2009a). 3D bifurcation analysis in geomaterials, investigation of the second order work criterion. Revue Europeenne de Genie Civil, 13(2), 135–147. doi:10.3166/ejece.13.135-147

Prunier, F., Nicot, F., Darve, F., Laouafa, F., & Lignon, S. (2009b). 3D multiscale bifurcation analysis of granular media. Journal of Engineering Mechanics (Mechanics), 135(6), 493–509. doi:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000003