

# DETERMINATION DE LA COURBE $E/E_M(\epsilon)$ A PARTIR DU TASSEMENT PRESSIOMETRIQUE D'UNE SEMELLE CIRCULAIRE

## DETERMINING OF THE $E/E_M(\epsilon)$ CURVE FROM THE PRESSIOMETRIC SETTLEMENT OF A CIRCULAR FOOTING

Olivier DAVID<sup>1</sup>,  
<sup>1</sup> FONDOUEST, Angers, France

**RÉSUMÉ** – Cet article explicite une formulation analytique des courbes de dégradation du module élastique en fonction du module pressiométrique sous la forme  $E/E_M = f(\epsilon)$ , permettant le calage du tassement obtenu à partir des modèles dérivés de la théorie de l'élasticité sur celui donné par le « modèle de Ménard », pour des semelles circulaires.

**ABSTRACT** – This article explains an analytical formulation of the E degradation curves as a function of the pressiometric modulus, in the form  $E/E_M = f(\epsilon)$ , yielding the calibration of the elastic settlement on that given by the "Ménard model", for circular footings.

### 1. Introduction

La méthode pressiométrique propose une approche fiable pour estimer le tassement d'une semelle rigide isolée de dimensions réduites sous un chargement homogène proche de la charge limite de service. Pour des configurations plus complexes, le géotechnicien a souvent recours à des modèles dérivés de la théorie de l'élasticité en corrélant les modules d'Young sur les modules pressiométriques. Les travaux de Hoang et al. (2018), qui font l'objet de développements dans le cadre du projet national ARSCOP, ont montré que cette corrélation peut être améliorée en considérant la variation du module d'Young  $E$  avec le taux de déformation. Des courbes de dégradation ont ainsi été proposées sur la base d'un calage numérique des tassements « élastiques » et des tassements « pressiométriques » pour des semelles rectangulaires de dimensions variables. Ces courbes, qui ne dépendent que de  $E_M$  et du coefficient  $\alpha$ , résultent d'un traitement par moindres carrés de la population des courbes obtenues pour chaque configuration.

Pour le cas des semelles circulaires de rayon  $R$ , cas théorique de référence à partir duquel a été établi le modèle semi-empirique de Ménard, les expressions du tassement se trouvent simplifiées. Nous proposons donc de reprendre l'exercice de calage entre les deux méthodes pour ce cas particulier, de manière à expliciter une formulation de  $E$  fonction de  $\epsilon$ , de  $E_M$  et des autres paramètres du modèle. La démarche peut en outre être étendue à un profil de modules pressiométriques évoluant avec la profondeur suivant une loi de puissance, aux cas des semelles souples et rigides et à des modèles élastiques 1D et 3D.

Cette approche apporte des éléments d'éclairage sur l'influence des paramètres et hypothèses du modèle ainsi que sur la représentativité des courbes de dégradation obtenues et leur domaine d'application.

### 2. Comparaison entre modèle de Ménard et élasticité vraie

Pour l'évaluation du tassement d'une semelle circulaire, Ménard et Rousseau (1962) ont traité séparément deux zones, dites sphérique et déviatorique, supposées séparées par une demi-sphère de rayon  $R$ , et ont considéré que le tassement d'une plaque circulaire posée en surface sous une charge répartie  $q$  était égal à la somme :

- du raccourcissement élastique  $s_c$  de la demi sphère soumise à une contrainte radiale moyenne égale à  $2/3.q$  - pour vérifier l'équilibre vertical (terme sphérique) ; En supposant la contrainte isotrope, ce terme est donné par  $s_c = 2.(1-2\nu).qR/(3E)$
- du tassement  $s_d$  de la demi-sphère supposée rigide qui s'enfonce dans le milieu semi-infini (terme déviatorique). Le déplacement  $u$  d'une sphère dans un milieu infini sous l'effet d'une force  $F$  est donné par  $u = F/(6.G.\pi.R)$  (de Josselin de Jong, 1957), soit pour une demi-sphère dans un milieu semi-infini  $s_d = 2.(1+\nu).qR/(3E)$

A noter que Ménard et Rousseau omettent semble-t-il le facteur 2 pour  $s_d$  dans leur modèle théorique de base.

Ce modèle est non exact en élasticité vraie mais permet de « pondérer » les deux types de comportement indépendamment ; pour  $\nu = 0,33$ , on obtient ainsi  $s_c + s_d = 1,1.qR/E$ , à comparer au tassement d'une plaque rigide  $s_{e,r} = \pi(1-\nu^2).qR/(2E) = 1,4.qR/E$ .

La formule finale intègre les corrections semi-empiriques permettant d'exprimer le module élastique équivalent en fonction du module pressiométrique. Ces corrections traduisent la non-élasticité du sol dans le domaine déviatorique et la variation du module en fonction du niveau de déformation et de l'éloignement de la surface d'application des contraintes. On obtient ainsi  $E = E_c/\alpha$  dans le domaine sphérique et  $E = 2.E_d.(R/R_0)^{1-\alpha}$  dans le domaine déviatorique.

### 3. Expression du tassement par couches d'épaisseur R

On exprime, à partir de la formule du tassement pressiométrique d'une part et des équations de l'élasticité d'autre part, le tassement  $\rho_n$  de la couche  $[n.R ; (n+1).R]$  de module pressiométrique  $E_{M,n}$  et de module d'Young  $E_n$ .

On considère un coefficient  $\alpha$  et un coefficient de Poisson  $\nu$  homogènes pour le massif et on définit, pour simplifier les notations, les fonctions de  $\nu$  suivantes:

$$N_1 = \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} \quad N_2 = \frac{(3-2\nu)(1-\nu)}{3.(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad N_3 = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

On précisera que les formulations pour le sol élastique, obtenues par intégration des formules de Boussinesq, ne sont exactes que dans le cas d'un massif homogène. Le modèle proposé suppose donc que la diffusion des contraintes dans le multicouche est la même que dans le cas d'un massif homogène. Cette simplification est jugée acceptable lorsque le module augmente avec la profondeur mais doit être gardée à l'esprit pour juger de la représentativité des résultats.

#### 3.1. Modèle de Ménard

Le tassement pressiométrique d'une semelle de rayon R peut s'écrire  $s_M = \sum_i \rho_n$

avec  $\rho_n = \frac{q.R}{E_{M,n}} . m_n$  ,  $n \in [0; 15]$  (1)

Pour  $n = 0$ ,  $m_0 = \frac{1}{9} [2\alpha + 4w_0(R_0/R)^{1-\alpha}]$

Et pour  $n \geq 1$ ,  $m_n = \frac{4}{9} w_n (R_0/R)^{1-\alpha}$

Avec  $R_0 = 0,3$  m et  $w_n$  donné par le tableau 1.

Tableau 1. Coefficient  $w_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$w_n$	0,25	0,30	0,11	0,08	0,06	0,045	0,032	0,023
n	8	9	10	11	12	13	14	15
$w_n$	0,018	0,015	0,013	0,012	0,011	0,011	0,010	0,010

### 3.2. Sol élastique

Le tassement de la couche n peut s'écrire  $\rho_n = \frac{R \cdot q}{N_3 \cdot E_n} \cdot J_n \cdot C_n \quad n \in [0; \infty]$  (2)

Avec :

$C_n = 1$  pour un modèle unidimensionnel

$C_n = N_2 - (N_2 - N_1) \cdot \frac{P_n}{J_n}$  pour un modèle tridimensionnel.

pour une semelle souple :

$$J_n = J_{s,n} = 1 - \frac{2 + (n+1)^2}{\sqrt{1+(n+1)^2}} + \frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$P_n = P_{s,n} = \left( \frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}} - n \right) \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^4} - \left( \frac{2+(n+1)^2}{\sqrt{1+(n+1)^2}} - (n+1) \right) \frac{1}{\left(\frac{(n+1)}{2}+1\right)^4}$$

pour une semelle rigide :

$$J_n = J_{r,n} = I(n) - I(n+1)$$

$$P_n = P_{r,n} = I(n) \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^4} - I(n+1) \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^4}$$

$$I(n) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) + \frac{n^2}{2 \cdot (n^2+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

## 4. Expression du rapport $k = E/E_M$

### 4.1. Calage du tassement sur chaque couche

L'identité des tassements élastiques et pressiométriques sur les seize premières couches, à partir des relations (1) et (2), induit un rapport  $k_n = E_n/E_{M,n}$  fonction de  $\alpha$ ,  $\nu$ , R et du modèle élastique considéré. Ce rapport peut s'exprimer en fonction de la déformation  $\varepsilon_n = \rho_n/R$  associée à chacune des couches si  $E_M$  est constant et en fixant le rapport  $q/E_M$  qui est défini implicitement par le domaine de charge où la formule pressiométrique est réputée valide, soit celui d'une semelle en situation de service. On retiendra pour ce rapport une valeur de 1/30 correspondant à  $q \approx p_i/3$  avec rapport  $E_M/p_i$  de l'ordre de 10.

La forme des courbes (figure 1) montre que le poids associé à chaque couche dans la formule pressiométrique ne définit pas entièrement la courbe de dégradation recherchée ; Le modèle pressiométrique intègre soit des approximations, soit d'autres phénomènes ou hypothèses qui ne seront pas pris en compte dans le modèle élastique.

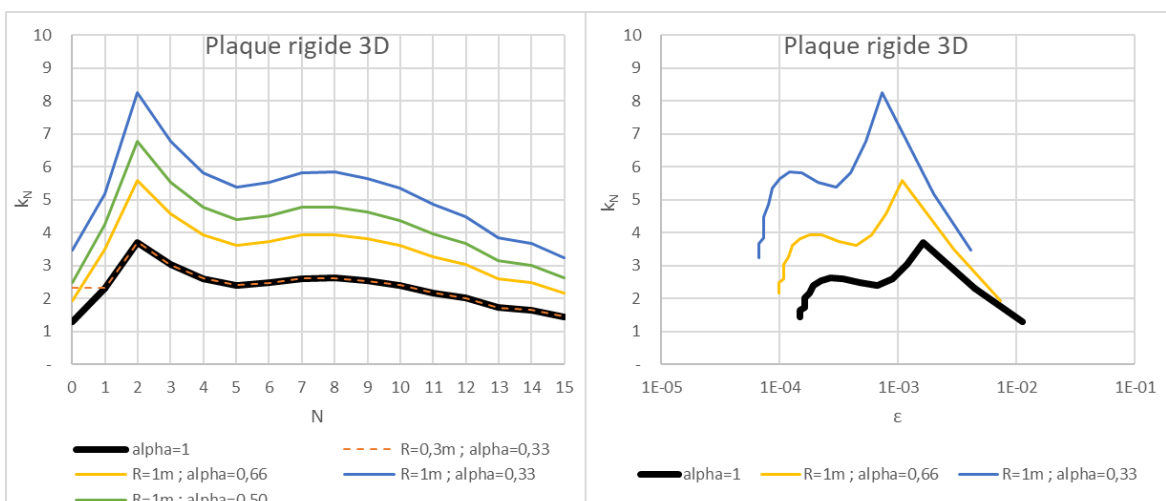


Figure 1. Valeurs de  $k_n$  pour le cas de la plaque rigide, modèle tridimensionnel.

### 3.3. Calage du tassement pour $E = f(z, \varepsilon)$

Sur le principe de la démarche adoptée par Hoang et al. (2018), on admet pour la dégradation du module élastique E en fonction et du taux de déformation  $\varepsilon$  une relation hyperbolique de type :

$$E(z, \varepsilon) = \frac{E_M(z)}{a+b.\varepsilon(z)} \quad (6)$$

Où a et b sont des constantes adimensionnelles qui sont à déterminer par calage.

Pour apprécier l'incidence d'une augmentation du module pressiométrique avec la profondeur, on supposera également un profil de modules pressiométriques évoluant avec la profondeur suivant une loi de type :

$$E_M(z) = E_M(0) \cdot \left(1 + \mu \frac{z}{R}\right)^m, \text{ soit pour la couche } n : E_{M,n} = E_{M,0} (1 + \mu \cdot n)^m \quad (7)$$

Où  $\mu$  et m sont des constantes adimensionnelles supposées connues. Le cas m=0 caractérise un profil de modules constants et le cas m=1 un module augmentant linéairement avec la profondeur.

Le tassement élastique de la couche n est alors donné par :

$$\rho_n = \frac{R.q}{N_3.E_n} \cdot J_n \cdot C_n = \frac{R.q}{N_3.E_{M,0} \cdot (1+\mu.n)^m} \cdot \left(a + b \frac{\rho_n}{R}\right) J_n \cdot C_n \quad (8)$$

L'identité des tassements pressiométriques et élastiques sous la semelle s'écrit donc :

$$s = \frac{aRq}{E_{M,0}} \cdot \sum_0^{15} \left( \frac{(1+\mu.n)^m \cdot N_3}{J_n \cdot C_n} - \frac{b.q}{E_{M,0}} \right)^{-1} = \frac{Rq}{E_{M,0}} \sum_0^{15} \frac{m_n}{(1+\mu.n)^m} \quad (9)$$

Cette égalité est toujours vérifiée si  $A = f(B)$  avec :

$$A = \frac{a}{\sum_0^{15} \frac{m_n}{(1+\mu.n)^m}} = a \cdot \frac{R}{s} \cdot \frac{q}{E_{M,0}} \quad B = \frac{b.q}{E_{M,0}} \quad (10)$$

$$f(B) = \frac{1}{\sum_0^{15} \left( \frac{(1+\mu.n)^m \cdot N_3 - B}{J_n \cdot C_n} \right)^{-1}}$$

La courbe  $A = f(B)$  peut être obtenue par résolution numérique pour  $\nu$ , m et  $\mu$  donnés ; sa forme générale est donnée sur les figures 2 et 3 et les variables associées sont définies dans le tableau 2. Elle peut être approchée par l'équation 11 :

$$A = \left[ \frac{1}{B_0 - B} + \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} - \left( \frac{1}{B_0^2} + \frac{p}{A_0^2} \right) \cdot B \right]^{-1} \quad (11)$$

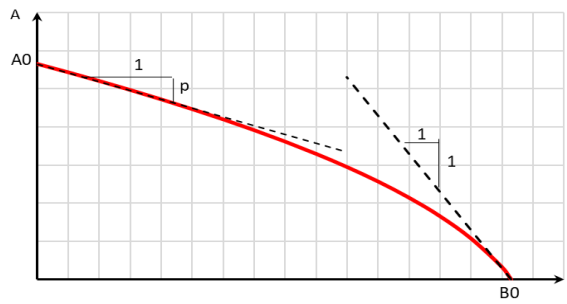


Figure 2. Forme de la courbe  $A = f(B)$ .

Pour un modèle donné, tous les couples (a ;b) vérifiant la relation 10 permettront de caler le tassement élastique sur le tassement pressiométrique. La relation montre qu'il n'existe pas de couple (a ; b) indépendant du rayon R de la semelle dans la mesure où le tassement pressiométrique n'est pas proportionnel à ce rayon (sauf si  $\alpha=1$ ). La minimisation de l'influence de R peut être obtenue en considérant le rapport R/s obtenu par un ajustement linéaire entre R et le tassement s sur la plage de variation de R où la formule pressiométrique est supposée valide. Pour  $\alpha$  donné et  $0,2 \text{ m} \leq R \leq 1,5 \text{ m}$ , cette valeur est obtenue pour  $R \approx 1 \text{ m}$ .

Tableau 2. Valeurs caractéristiques approchées de la courbe  $A = f(B)$

	Plaque souple - 1D	Plaque souple - 3D
$A_0$	$\frac{N_3}{2} \left( 1 + \frac{m}{2} \cdot \ln(1 + 3\mu) \right)$	$\frac{1}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \left( 1 + \frac{3 - 2\nu}{6(1 - \nu)} \cdot m \cdot \ln(1 + 3 \cdot \mu) \right)$
$B_0$	$\frac{1,14 \cdot (1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$	$\frac{1}{(0,88 - 1,18\nu)(1 + \nu)}$
$p$	$\approx - \left( \frac{A_0}{B_0} \right)^2 1,5^{(1-m)}$	$\approx - \left( \frac{A_0}{B_0} \right)^2 2,2^{(1-m)}$
	Plaque rigide - 1D	Plaque rigide - 3D
$A_0$	$\frac{2 \cdot N_3}{\pi} \left( 1 + \frac{2 \cdot m}{\pi} \cdot \ln(1 + 2,8 \cdot \mu^{0,9}) \right)$	$\frac{2}{\pi(1 - \nu^2)} \left( 1 + \frac{2 \cdot (3 - 2\nu)}{3 \cdot \pi(1 - \nu)} \cdot m \cdot \ln(1 + 2,8 \cdot \mu^{0,9}) \right)$
$B_0$	$\frac{1,64 \cdot (1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$	$\frac{1}{(0,61 - 0,87\nu)(1 + \nu)}$
$p$	$\approx - \left( \frac{A_0}{B_0} \right)^2 1,2^{(1-m)}$	$\approx - \left( \frac{A_0}{B_0} \right)^2 2^{(1-m)}$

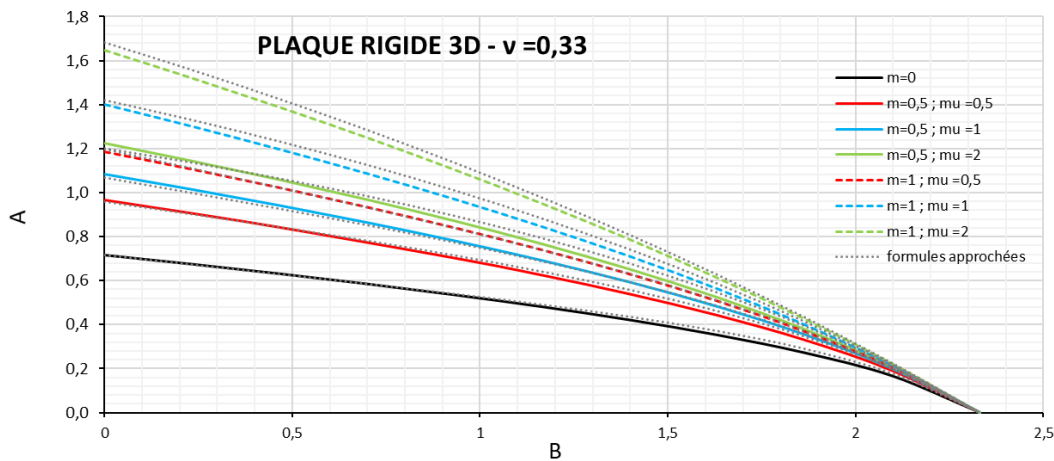


Figure 3. Courbes  $A = f(B)$  pour le modèle « plaque rigide ».

### 3.4. Courbes $E/E_M = f(\epsilon)$

Il apparaît donc nécessaire, pour définir une courbe de dégradation, de poser une hypothèse supplémentaire sur a ou b. Pour se placer dans le domaine de validité de la formule pressiométrique, on considérera dans la suite de l'analyse le modèle de plaque rigide tridimensionnel avec  $q/E_{M,0} = 1/30$  et  $\nu = 0,33$ . La figure 5 représente, pour différentes valeurs de a exprimées sous la forme plus explicite  $G_{max}/E_M = \frac{1}{2a(1+\nu)}$ , les courbes  $E/E_M$  obtenues en faisant varier  $\alpha$  entre 1/3 et 1, R entre 0,3m et 1m, m entre 0 et 1 et  $\mu$  entre 0 et 1.

Pour  $G_{max}/E_M$  donné, le fuseau des courbes obtenues est très étroit ; Pour des déformations supérieures à  $5.10^{-3}$  les courbes se confondent quasiment avec l'asymptote  $q/E_M/(B_0.\epsilon)$ .

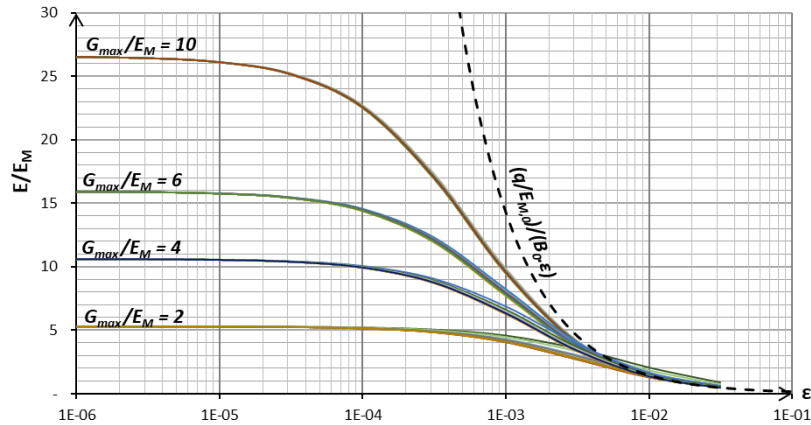


Figure 4. Courbes de régression du module élastique pour  $G_{max}/E_M$  donné

Pour  $a$  et  $q/E_M$  fixés, les variations de  $b$  (fonction de  $s/R$ ,  $m$  et  $\mu$ ) ont ainsi peu d'incidence sur la courbe. En revanche, dans le calcul du tassement élastique de la semelle, elles influencent fortement la déformation des couches supérieures et par conséquent les valeurs de  $E/E_M$  et du tassement. Le tableau 3 fournit pour exemple les résultats de l'application numérique pour  $\nu = 0,33$ ,  $G_{max}/E_M = 7$  (soit  $a = 0,054$ ),  $E_M = 10$  MPa (constant),  $q = E_M/30$ ,  $R = 1$  m,  $\alpha = 1/3$  ou  $\alpha = 1$ .

Tableau 3. Exemple d'application numérique

$\alpha$	Tassement $s$ (cm)	$b$	Couche supérieure			
			$\epsilon_0$	$E_0/E_M$	$\rho_{0,elast.} / s$	$\rho_{0,pressio.} / s$
1/3	0,9	61	$6.10^{-3}$	2,2	66 %	45 %
1	2,2	66	$2.10^{-2}$	0,7	85 %	50 %

Cet exemple illustre également que, pour les valeurs courantes de  $G_{max}/E_M$  (environ 6 à 10), la répartition du tassement avec la profondeur est assez différente entre le modèle élastique et le modèle pressiométrique, avec un poids des couches supérieures nettement plus prépondérant dans le modèle élastique.

Pour obtenir des déformations plus cohérentes entre les deux approches, on se propose d'ajuster les courbes  $E/E_M$  sur les valeurs de  $k_n = E_n/E_{M,n}$  des trois couches supérieures données par le calage par couche (cf. figure 1). Les valeurs de  $G_{max}/E_M$  ajustées sur la figure 5 sont comprises entre 2 et 5 si on se limite à des rayons  $R$  inférieurs à 1m. L'ajustement n'est pas indépendant du rayon et n'est donc pas intrinsèque au sol.

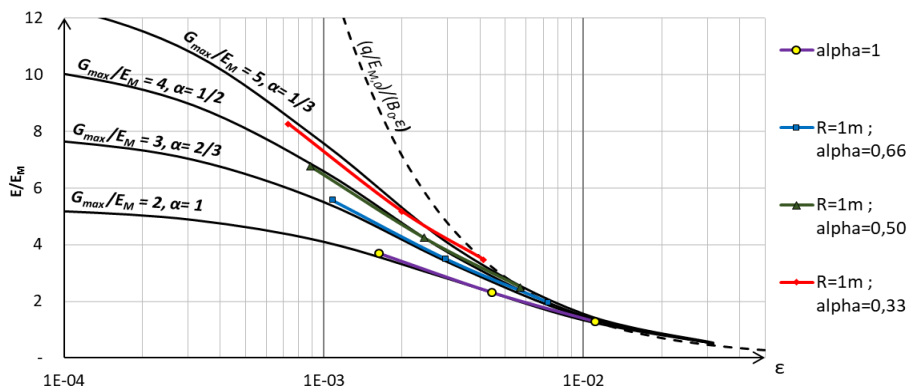


Figure 5. Ajustement des courbes  $E/E_M$  sur  $k_n = E_n/E_M$  pour  $R=1m$

### 3.5. Courbes $G/G_{max}$

La représentation sous la forme  $G/G_{max}$  permet une comparaison avec quelques courbes données dans la littérature.

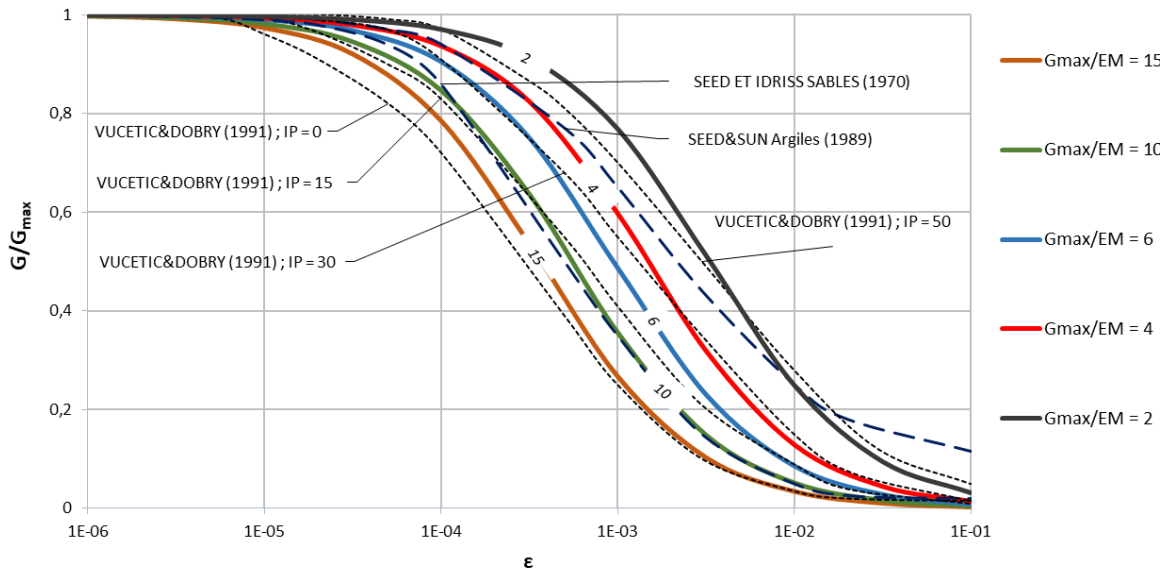


Figure 6. Courbes  $G/G_{max}$

On reste globalement dans le fuseau des courbes de référence. En lien avec l'hypothèse d'une forme hyperbolique simple, les courbes définies par calage donnent un rapport  $G/G_{max}$  relativement plus élevé pour les déformations comprises entre  $10^{-5}$  et  $10^{-3}$ . En considérant le calage dans la gamme de déformation  $[10^{-3}; 10^{-2}]$ , le comportement des sables est reproduit avec des valeurs de  $a$  associées à des rapports  $G_{max}/E_M$  de l'ordre de 10 à 15, et celui des argiles avec des valeurs de  $a$  associées à des rapports  $G_{max}/E_M$  de l'ordre de 2 à 10, suivant la plasticité.

### 3.5. Comparaison avec les courbes proposées par Hoang et al. (2018)

Les lois de dégradation obtenues par la méthode décrite dans le présent article présentent une forme assez différente de celles proposées par Hoang. On notera les valeurs particulièrement faibles de  $G_{max}/E_M$  implicitement définies par ces dernières (de 0,7 pour  $\alpha=1$  à 2,9 pour  $\alpha=1/3$ ).

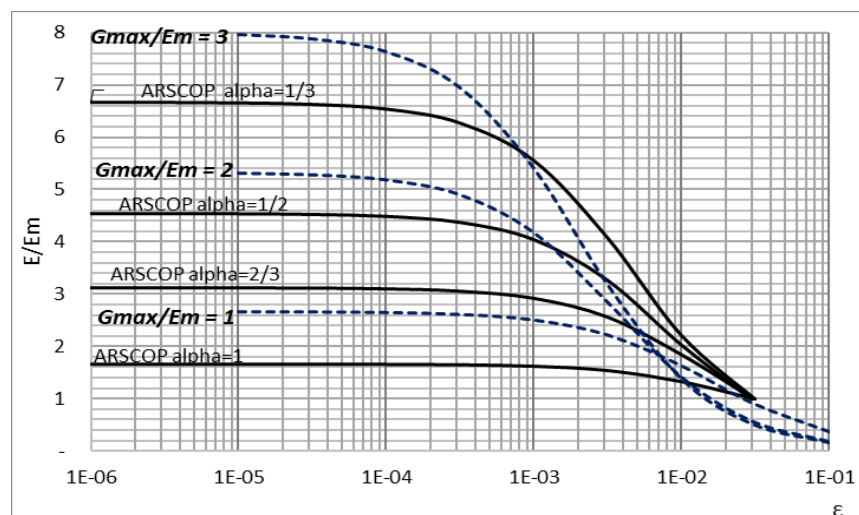


Figure 7. Comparaison avec les courbes proposées par Hoang et al (2018)

## 5. Conclusions

La démarche présentée établit une relation explicite entre les paramètres  $a$  et  $b$  décrivant la dégradation de  $E/E_M$  avec la déformation qui permet le calage du tassement élastique d'une semelle circulaire sur celui donné par la formule de Ménard ; la définition complète de la courbe nécessite une hypothèse supplémentaire sur le paramètre  $a$  (qui peut s'exprimer sous la forme  $G_{max}/E_M$ ) et sur le rapport  $q/E_M$ , qui définit implicitement le domaine de validité de la méthode pressiométrique.

La forme des courbes obtenues avec des valeurs réalistes de  $G_{max}/E_M$  sont cohérentes avec celles données dans la littérature mais surestiment a priori le poids des couches de surface dans le calcul des tassements. Pour obtenir des déformations plus réalistes dans les couches dont la déformation est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$ , on doit considérer des valeurs de  $G_{max}/E_M$  plus faibles, de l'ordre de 2 à 5, ce que tend également à suggérer les résultats obtenus par Huang et al. Dans ces conditions, les courbes hyperboliques obtenues ne parviennent pas à décrire correctement l'évolution du module sur toute la gamme des déformations et leur utilisation doit être limitée au calcul d'ouvrages géotechniques induisant des niveaux de déformation équivalents à ceux d'une semelle en situation de service.

Le calage de courbes types en fonction du coefficient  $\alpha$  pourrait certainement être amélioré en affinant l'hypothèse sur le rapport  $q/E_M$  qui est déterminante pour les déformations supérieures à  $5 \cdot 10^{-3}$  ; ce rapport dépend en effet du rapport  $E_M/p_i$  et donc indirectement de  $\alpha$ .

Il conviendrait également de préciser l'incidence de l'hypothèse simplificatrice de départ consistant à appliquer les formules de Boussinesq dans un milieu non homogène, où le module augmente rapidement avec la profondeur. On peut a priori considérer que le domaine d'utilisation des courbes de dégradation pour le calcul des tassements recouvre celui des modèles de calculs élastiques faisant eux même cette simplification. Dans un sol sensiblement homogène, cette simplification influence en effet peu le calage, le tassement sous fondations se produisant principalement dans les couches de surface.

## 6. Références bibliographiques

- Apageo (1998). Notice Générale D60. Règles de réalisation des essais au pressiomètre Ménard et d'exploitation des résultats obtenus pour le dimensionnement des fondations.
- Baguelin F., Jézéquel J.F., Shields D.H. (1978). The pressuremeter and foundation engineering, Series on rock and soil mechanics, Trans-tech Publications - Clausthal, Allemagne, 617 pages.
- Combarieu O. (2006). L'usage des modules de déformation en géotechnique. Revue française de géotechnique N°114, pp. 3-32.
- Goubet R. (1989). Les calculs de tassement - Réflexions portant sur la validité des méthodes actuelles. Note Simecsol.
- Hoang M.T. et al. (2018). Estimation du rapport  $E/E_M$  : application aux radiers de grandes dimensions. JNGG 2018.
- De Josselin de Jong G. (1957). Application of stress Functions to consolidation problems. Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Londres.
- Ménard L., Rousseau J. (1962). L'évaluation des tassements - Tendances nouvelles. Sols-Soils, No 1, pp. 13-30.
- Ménard L. (1967). Calcul des tassements. Note technique du 14/09/1967.